



Уральский  
федеральный  
университет

имени первого Президента  
России Б.Н.Ельцина

Институт новых материалов  
и технологий

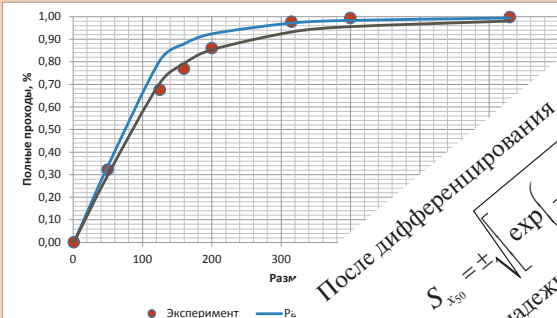
В. Б. ПОНОМАРЕВ  
А. Б. ЛОШКАРЕВ

# МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ИНЖЕНЕРНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

Учебное пособие

Аппроксимация Плитта

Сита, мм	$D$	$\delta$	$\delta^2$	$\gamma$	$\gamma\delta$	$D\gamma$	$\Delta^2$	$D\Delta^2$
630	1,00	6,446	41,547	5,8061	37,4247	0,9941	8,77E-05	0,0000877
400	0,99	5,991	35,898	5,0141	30,0416	0,9834	0,0000	0,0000000
315	0,98	5,753	33,092	3,7446	21,5408	0,9716	2,8E-05	0,0000280
200	0,86	5,298	28,072	1,8128	9,6048	0,9239	0,0000	0,0000000
160	0,77	5,075	25,757	1,2015	6,0981	0,8793	0,0170	0,0014850
125	0,68	4,828	23,313	0,7313	3,5312	0,8056	0,0170	0,0013680
50	0,32	3,912	15,304	-0,7492	-2,9308	0,3380	0,0002	0,0000640
1	0,00	0,000	0,000	-9,2102	0,0000	0,0001	1,1E-05	0,0000110
$\Sigma =$		37,304	202,983	8,3510	105,3103		0,03379	
$A_0 =$		-9,614		2,286				
$A_1 =$		2,286		67,103				



После дифференцирования  
 $S_{x=50} = \pm \sqrt{\exp\left(-\frac{p}{a}\right)\left(\frac{1}{p}\right)^2} S_o^2 + \left[\exp\left(-\frac{p}{a}\right)\left(\frac{1}{p}\right)^2\right] S_p^2$   
Задавшись надежностью  $P = 0,95$

коэффициентов Стюдента

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \cdot h$$
$$k_1 = hf(x_n, y_n);$$
$$k_2 = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right);$$
$$k_3 = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}\right);$$
$$k_4 = hf(x_n + h, y_n + k_3);$$



Министерство науки и высшего образования  
Российской Федерации  
Уральский федеральный университет имени  
первого Президента России Б. Н. Ельцина

В. Б. Пономарев  
А. Б. Лошкарев

# **МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ИНЖЕНЕРНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА**

Учебное пособие

Рекомендовано методическим советом  
Уральского федерального университета  
для студентов вуза, обучающихся  
по направлениям подготовки  
08.03.01, 08.04.01 — Строительство,  
18.03.01 — Химическая технология

Екатеринбург  
Издательство Уральского университета  
2019

УДК 666.965:543.08(075.8)

ББК 35.41-01я73

П56

Рецензенты:

кафедра горной механики Уральского государственного горного университета (д-р техн. наук проф. кафедры *В. Я. Потанов*);

директор ООО Предприятие «Техника метрологии для энергетики, Екатеринбург» *Ю. И. Сычев*

**Пономарев, В. Б.**

П56 Математическая обработка результатов инженерного эксперимента : учебное пособие / В. Б. Пономарев, А. Б. Лошкарев ; Мин-во науки и высшего образования РФ. — Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 2019. — 104 с.

ISBN 978-5-7996-2784-3

Пособие знакомит студентов бакалавриата и магистратуры с проведением инженерных экспериментов, моделированием технологических процессов и оборудования. В работе приводятся математические основы обработки результатов экспериментов, методы учета инструментальных и случайных погрешностей измерений. Теоретические выкладки закрепляются практическими методиками и примерами.

Предназначено для студентов, изучающих дисциплины «Математическое моделирование технологических процессов» и «Математическое моделирование».

Библиогр.: 21 назв. Рис. 29. Табл. 10.

УДК 666.965:543.08(075.8)

ББК 35.41-01я73

ISBN 978-5-7996-2784-3

© Уральский федеральный  
университет, 2019

---

---

# Оглавление

---

---

<b>ГЛАВА 1. Теоретические основы математической</b>	
<b>    обработки результатов измерений .....</b>	<b>5</b>
1.1. Ошибки при измерениях .....	6
1.1.1. Виды ошибок .....	6
1.1.2. Случайные ошибки .....	8
1.1.3. Свойства случайных погрешностей .....	8
1.1.4. Среднеарифметическое значение измеряемой	
величины .....	10
1.1.5. Вероятнейшие ошибки .....	11
1.2. Оценка точности измерений .....	12
1.2.1. Критерии точности измерений .....	12
1.2.2. Сводная таблица критериев точности .....	20
1.3. Правила округления чисел .....	22
1.4. Вычисление ошибок функции измеренных величин .....	25
1.4.1. Операции сложения и вычитания	
для приближенных чисел .....	25
1.4.2. Перемножение и возведение в степень	
приближенных чисел .....	26
1.4.3. Вывод общей формулы для предельной	
относительной ошибки функции .....	28
1.4.4. Средняя квадратичная ошибка функции .....	30
1.4.5. Погрешности средств измерений .....	32
1.5. Обработка результатов измерений .....	34
Регрессионный анализ .....	34
1.6. Инженерный эксперимент .....	46
1.7. Численные методы решения инженерных задач .....	51
1.7.1. Вычислительные алгоритмы .....	51
1.7.2. Нахождение корня непрерывной функции .....	53
1.7.3. Методы Рунге — Кутты .....	56
1.8. Контрольные вопросы .....	59

<b>ГЛАВА 2. Методы решения инженерных задач .....</b>	<b>60</b>
2.1. Методика определения предельной относительной ошибки функции на примере математического маятника.....	60
2.1.1. Выполнение измерений .....	62
2.1.2. Обработка результатов измерений.....	63
2.1.3. Определение величины ускорения свободного падения.....	69
2.2. Методика определения погрешностей вычисления коэффициентов уравнения регрессии для функции фракционного разделения сыпучих материалов .....	70
2.2.1. Основы теории фракционирования сыпучих материалов .....	70
2.2.2. Методика проведения эксперимента .....	72
2.2.3. Регрессионный анализ по методу наименьших квадратов.....	77
2.3. Применение метода наименьших квадратов для аналитического описания дисперсного состава измельченных материалов .....	80
2.3.1. Основы теории.....	80
2.3.2. Методика расчета .....	82
2.4. Имитационное моделирование траектории падения шарообразных частиц с наклонной поверхности.....	88
2.4.1. Основы теории.....	88
2.4.2. Выполнение имитационного эксперимента .....	94
2.5. Контрольные вопросы .....	98
<b>Библиографический список.....</b>	<b>99</b>

---

# ГЛАВА 1

## Теоретические основы математической обработки результатов измерений

---

**Н**аучные исследования относятся к сфере человеческой деятельности, направленной на выработку и систематизацию достоверных знаний о действительности [1].

Цель научного исследования — выявление новых закономерностей изучаемого процесса, получение дополнительных знаний о действительности.

**Теория эксперимента** — наука, занимающаяся вопросами правильной организации экспериментальных исследований, которая включает три основных направления:

1. **Моделирование и подобие** — определяет, как должен проводиться эксперимент, какие величины, характеризующие исследуемый объект или процесс, должны измеряться при экспериментальных исследованиях, и как обрабатывать результаты исследований, чтобы полученные закономерности были справедливы как для данного объекта (процесса), так и для группы ему подобных.

2. **Планирование эксперимента** — совокупность методов и процедур, применение которых при организации и проведении эксперимента позволяет получить искомые зависимости с минимальными временными и материальными затратами.

3. **Статистическая обработка** экспериментальных данных — совокупность методик, позволяющих получить достоверные результаты на основе данных, содержащих погрешности.

## 1.1. Ошибки при измерениях

---

Любые научные исследования включают в себя физические измерения, в результате которых получаются числовые значения физических величин. От правильности математической обработки этих результатов зависят выводы и получаемые аналитические зависимости. Различают *прямые* и *косвенные* измерения.

При прямом сравнении измеряемой величины со своей единицей меры измерения называют непосредственными (прямыми). Например, чтобы узнать длину поверхности, ее измеряют рулеткой, диаметр отверстия — штангенциркулем и т. д.

Косвенные измерения производятся не над физическим объектом, а над другими физическими величинами, с которыми измеряемая величина связана определенными математическими формулами. Например, истинную плотность твердых сыпучих частиц измеряют делением массы частиц на объем вытесненной этими частицами жидкости. При этом как масса, так и объем жидкости определяются с определенными погрешностями, величина которых зависит от чувствительности (точности) приборов.

### 1.1.1. Виды ошибок

При непосредственных измерениях получаются приближенные значения физических величин, которые отклоняются от истинных величин. Такие отклонения результатов измерений называют погрешностями измерений, обусловленных различными причинами.

Различают три основных типа ошибок:

- 1) грубые;
- 2) систематические;
- 3) случайные.

*Грубые ошибки* (промахи) значительно превышают ожидаемую погрешность и появляются вследствие неправильных записей результатов отсчетов по шкале измерительного прибора, нарушения технологии измерений и т. п. Устраняются такие погрешности повторными замерах.

*Систематическими ошибками* называются такие, когда при последовательных параллельных замерах среднее значение измеряемой вели-



чины отклоняется от ожидаемого на некоторую постоянную величину. Как правило, такие погрешности связаны с тарировкой измерительных инструментов и называются инструментальными. Бывают систематические ошибки, обусловленные другими причинами, например, температурные расширения металлических конструкций и др.

Кумулятивная систематическая погрешность в рамках одного эксперимента будет либо увеличивать, либо уменьшать правильный результат.

Выделяют четыре группы систематических ошибок.

1. Ошибки известной природы и их величины могут быть определены. Для устранения этих ошибок вводятся соответствующие поправки. Например, при измерениях длины латунной детали стальной линейкой возникает погрешность изменения длины детали и линейки при изменении температуры окружающей среды. Деталь длиной 100 мм увеличится в размере на 0,047 мм при повышении температуры на 25 °С, а стальная линейка той же длины — на 0,027 мм. Такая поправка возможна в связи с применением закона теплового расширения металлов.

2. Ошибки известной природы, но неизвестной величины. Это, например, погрешность измерительных приборов, определяемая классом точности.

3. Ошибки неизвестной природы. Так, вычисляя плотность тела, зная его массу и объем, при наличии внутренних пустот появляется грубая погрешность, устранить которую можно, лишь измеряя требуемую характеристику тела другим способом.

4. Ошибки, связанные со свойствами измеряемого объекта. Так, измерение диаметра округлой частицы может привести к ошибке ввиду овальности ее поверхности. Уменьшение погрешности возможно при измерениях размера частицы при различных положениях штангенциркуля относительно ее поверхности.

Для исключения систематических погрешностей необходимо повторить эксперимент другим методом при других условиях. Если полученные результаты совпадают, имеется некоторая гарантия их правильности.

Даже в случае учета всех систематических и инструментальных ошибок при измерениях могут оказаться случайные погрешности, обусловленные случайными факторами, такими как колебания напряжения или температуры, движение воздуха и др. При этом, если случайная погрешность меньше систематической, необходимо устранить систе-

матическую ошибку. В противном случае, заняться устранением случайной погрешности.

*Случайные ошибки* обусловлены множеством обстоятельств, поэтому при многократных измерениях одной и той же физической величины каждый раз получается новое значение.

### 1.1.2. Случайные ошибки

Если обозначить  $X$  истинное значение измеряемой величины, при одном измерении получим не число  $X$ , а некоторое число  $a$ , обычно близкое к  $X$ . Разность  $X - a$  называют истинной абсолютной ошибкой одного измерения  $x$ .

$$x = X - a. \quad (1.1)$$

Из равенства (1.1) видно, что если  $X > a$ , то случайная ошибка имеет знак плюс; если  $X < a$  — знак минус, при  $X = a$  равна нулю.

Если повторить измерения  $n$  раз, то получим серию (ряд) чисел  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , которые называются результатами измерений.

При этом измерения называют *равноточными*, если они выполнены в одинаковых условиях, одним экспериментатором, одними и теми же приборами.

Совокупность чисел  $a_1, a_2, \dots, a_n$  называют рядом равноточных измерений. В данной работе речь пойдет только об ошибках равноточных измерений.

Если серия случайных ошибок состоит из большого их количества, то легко увидеть закон, которому они подчиняются. Такие законы называют законами больших чисел или статистическими законами.

### 1.1.3. Свойства случайных погрешностей

Из анализа большого количества измерений были выявлены свойства для случайных ошибок [2]:

- количество ошибок со знаком плюс почти равно числу ошибок со знаком минус, причем это правило выполняется тем лучше, чем больше произведено измерений;
- крупные ошибки встречаются реже мелких;

- величина наиболее крупных ошибок не превышает некоторой определенной величины, зависящей от точности измерений. Максимальная ошибка в данном ряду равнозначных измерений называется предельной ошибкой;
- для большой выборки измерений справедливо приближенное равенство

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \approx 0. \quad (1.2)$$

Свойства случайных ошибок показывают, что частота  $P$  появления случайной погрешности величиной  $x$  будет тем меньше, чем больше сама эта ошибка. Иначе, частота или вероятность появления случайных ошибок есть убывающая функция их величины. Эта функция имеет вид

$$P = \frac{c}{\sqrt{\pi}} e^{-xc^2}. \quad (1.3)$$

Здесь  $c$  — некоторая константа, называемая мерой точности измерений.

Формулу (1.3) называют формулой случайных ошибок, или кривой Гаусса. Это закон распределения случайных ошибок, являющийся основной формулой в теории погрешностей [2].

Если по уравнению (1.3) построить график в осях  $x$  и  $P$ , то для данного значения константы  $c$  получится кривая вероятностей (рис. 1.1).

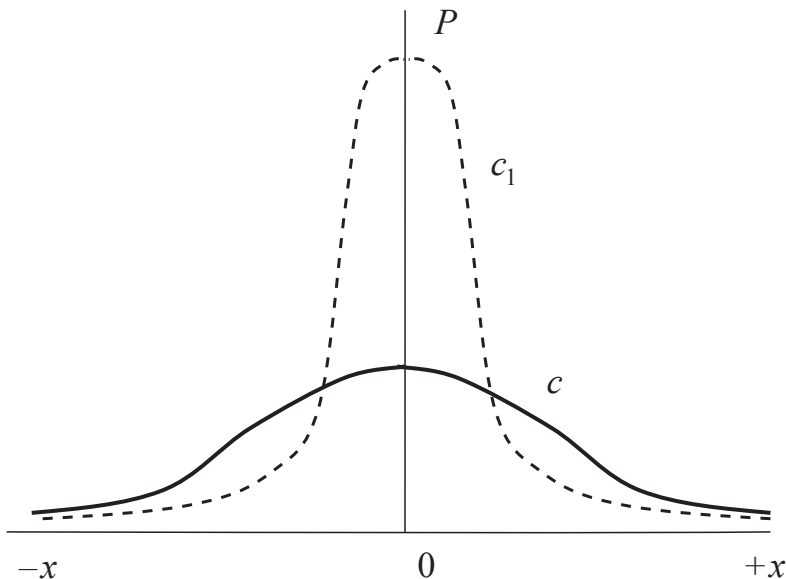


Рис. 1.1. Кривая Гаусса  $c_1 > c$

Из рисунка видно, что кривая ошибок для  $c_1$  получается более узкая, чем для  $c$ . Такой ряд будет более точный.

#### 1.1.4. Среднеарифметическое значение измеряемой величины

Проведение измерений направлено на поиск неизвестного истинного значения  $X$  физической величины.

Допустим, что сделано  $n$  равноточных измерений, при этом одни измерения больше  $X$ , другие меньше  $X$ , может быть имеются даже равные  $X$ , но какие неизвестно. Если из всех этих чисел составить функцию  $f_1(a_1, a_2, \dots, a_n)$ , то величина ее будет равна определенному числу  $b_1$ :

$$b_1 = f_1(a_1, a_2, \dots, a_n), \quad (1.4)$$

которая будет отличаться от  $X$  на некоторую величину  $\Delta b_1$ :

$$\Delta b_1 = X - b_1, \quad (1.5)$$

Если составим другую функцию  $f_2$ , то она будет равняться другому числу  $b_2$ , отличающемуся от  $X$  на величину  $\Delta b_2$ .

Таким образом, можно найти такое число  $a$  в виде функции от чисел  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , которое отличается от  $X$  меньше, чем любое из вышеупомянутых чисел  $b_1, b_2, \dots, b_n$ .

Это число  $a$  называют наиболее вероятным значением измеряемой величины и принимают за значение искомого  $X$ .

На основе формулы Гаусса и с помощью теории вероятности доказывается, что функция  $a = f(a_1, a_2, \dots, a_n)$  имеет вид

$$a = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}, \quad (1.6)$$

т.е. наиболее вероятностное значение измеряемой величины равно *среднеарифметическому* из результатов измерений.

Отклонение среднеарифметического  $a$  от истинного значения  $X$  называют истинной абсолютной ошибкой или истинной абсолютной погрешностью

$$X - a = \pm x. \quad (1.7)$$

Одна из задач математической обработки результатов измерений состоит в том, чтобы определить те границы, в которых лежит истинная абсолютная ошибка  $x$  среднего арифметического.

Для оценки качества измерения часто определяют относительную погрешность  $\varepsilon$ .

$$\varepsilon = \pm \frac{x}{a} \text{ или } \varepsilon = \pm \frac{x}{a} 100 \%. \quad (1.8)$$

Если относительная погрешность при измерении составляет более 10 %, можно говорить только об оценке измеряемой величины. Для инженерных расчетов рекомендуется проводить измерения с относительной погрешностью менее 10 %.

### 1.1.5. Вероятнейшие ошибки

Пусть имеется ряд равноточных измерений  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . Подсчитаем его арифметическую середину  $a$  и составим разности  $(a - a_1), (a - a_2), \dots, (a - a_n)$ . Каждую из этих разностей называют отклонением отдельного измерения от арифметической середины и обозначают буквой  $v$ :

$$v_1 = (a - a_1); v_2 = (a - a_2); \dots; v_n = (a - a_n). \quad (1.9)$$

Вероятнейшие ошибки обладают интересным свойством. Сложим равенства почленно:

$$v_1 + v_2 + \dots + v_n = na - (a_1 + a_2 + \dots + a_n). \quad (1.10)$$

На основании равенства (1.6) видно, что правая часть равна нулю при любом числе измерений  $n$ , таким образом,

$$v_1 + v_2 + \dots + v_n = 0. \quad (1.11)$$

Из (1.11) видно, что алгебраическое сложение вероятнейших ошибок для любого количества измерений дает нулевой результат.

*Случайные (истинные) ошибки не обладают этим свойством!*

## 1.2. Оценка точности измерений

### 1.2.1. Критерии точности измерений

Вероятнейшие ошибки  $v_1, v_2, \dots, v_n$  составляют основу математической обработки результатов измерений, только по ним определяют предельную абсолютную ошибку  $\Delta a$  среднеарифметического  $a$  для оценки точности итогового результата измерений.

В общем случае, точность измерений оценивают по ряду критериев точности. Рассмотрим их.

#### Средняя ошибка отдельного измерения

Если арифметическую сумму всех случайных ошибок  $x_1 + x_2 + \dots + x_n$  разделим на число всех этих ошибок  $n$ , то получим число  $h$ , которое называют средней случайной ошибкой, или средним отклонением от отдельного измерения от истинного значения измеряемой величины

$$h = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}. \quad (1.12)$$

#### Средняя квадратичная ошибка отдельного измерения

Если сумму квадратов всех случайных ошибок разделить на общее количество ошибок, получим средний квадрат случайной ошибки

$$S_n^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n}. \quad (1.13)$$

Корень квадратный из этой величины называют *средней квадратичной ошибкой отдельного измерения*

$$S_n = \pm \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n}}. \quad (1.14)$$

Средняя квадратичная ошибка лучше показывает точность, чем средняя ошибка, так как крупные ошибки особенно резко сказываются при возведении в квадрат.

Поскольку истинное значение  $X$  измеряемой величины неизвестно, то остаются неизвестными истинные ошибки  $x_i$  и, следовательно, формулой (1.14) пользоваться нельзя. В математической теории слу-

чайных ошибок [2] для большого количества измерений справедливо следующее равенство:

$$\sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n}} = \sqrt{\frac{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2}{n-1}}. \quad (1.15)$$

Следовательно,

$$S_n = \pm \sqrt{\frac{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2}{n-1}}. \quad (1.16)$$

Таким образом, можно вычислить среднюю квадратичную ошибку отдельного измерения  $S_n$ , не зная самих истинных ошибок.

При большом числе наблюдений величина  $S_n$  стремится к постоянному значению

$$\sigma = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n. \quad (1.17)$$

Параметр  $\sigma$  (стандартная погрешность) определяет ширину распределения, связанную с мерой точности  $c$  соотношением

$$c = \frac{1}{\sigma\sqrt{2}}. \quad (1.18)$$

Тогда формула Гаусса (1.3) преобразуется к более распространенному виду

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x)^2}{2\sigma^2}}. \quad (1.19)$$

В теории случайных ошибок доказывается, что средняя ошибка отдельного измерения связана со среднеквадратичной как

$$h = \pm \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{\frac{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2}{n-1}} = \pm \sqrt{\frac{2}{\pi}} S_n \approx 0,8 S_n. \quad (1.20)$$

**Пример 1.1.** Требуется по десяти результатам измерения диаметра металлического цилиндра вычислить среднюю квадратичную ошибку отдельного измерения.

Ход вычислений представлен в табл. 1.1, ошибка  $S_n$  вычислена по формуле (1.16).

Таблица 1.1

Таблица вычислений

№ измерения	$d_i$ , мм	$v_i = d - d_i$	$v_i^2$	$S_n$
1	13,83	+0,01	0,0001	$\pm 0,014$
2	13,85	-0,01	0,0001	
3	13,82	+0,02	0,0004	
4	13,83	+0,01	0,0001	
5	13,86	-0,02	0,0004	
6	13,84	0	0	
7	13,83	+0,01	0,0001	
8	13,85	-0,01	0,0001	
9	13,83	+0,01	0,0001	
10	13,86	-0,02	0,0004	
—	$D = 13,84$	$\sum_1^{10} v_i = 0$	$\sum_1^{10} v_i^2 = 0,0018$	—

### Средняя среднеквадратичная ошибка окончательного результата измерений

Поскольку истинную абсолютную ошибку  $x$  окончательного результата измерений найти невозможно, вычисляют оценку этой ошибки — среднеквадратичную ошибку среднеарифметического. Согласно теории случайных ошибок, ее можно определить по формуле

$$S = \pm \sqrt{\frac{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2}{n(n-1)}} = \frac{S_n}{\sqrt{n}}. \quad (1.21)$$

Таким образом, повысить точность вычислений можно увеличением числа наблюдений, это *фундаментальный закон теории ошибок*.

Для нашего примера (табл. 1.1) имеем  $n = 10$ ,  $S_n = 0,014$ . Тогда по формуле (1.21)

$$S = \pm \frac{0,014}{\sqrt{10}} = 0,0044 \text{ мм.}$$

### Предельная случайная ошибка

Предельной случайной ошибкой  $x_{\text{пр}}$  называют самую большую из всех случайных ошибок  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , в данном ряду равноточных измерений.



Случайные ошибки распределяются по отношению к средней квадратичной ошибке отдельного измерения следующим образом:

- 1) 68,3 % случайных ошибок меньше  $S_n$ ;
- 2) 95,7 — этих ошибок меньше  $2S_n$ ;
- 3) 99,7 — меньше  $3S_n$ .

Таким образом, принимают, что для всякого рода равноточных измерений предельная случайная ошибка с вероятностью, близкой к 100 %, равна  $3S_n$ .

$$x_{\text{пр}} = 3S_n. \quad (1.22)$$

Если в формулу (1.21) на место ошибки  $S_n$  подставить  $3S_n$ , получим предельную абсолютную ошибку среднеарифметического

$$\Delta a = \frac{3S_n}{\sqrt{n}}. \quad (1.23)$$

Для нашего примера (табл. 1.1) будем иметь

$$\Delta d = \pm \frac{3 \cdot 0,014}{\sqrt{10}} = \pm 0,013 \text{ мм.}$$

В этом случае окончательный результат измерений диаметра следует записывать  $d = (13,84 \pm 0,013) \text{ мм.}$

Предельная абсолютная ошибка среднеарифметического не является достаточной характеристикой качества измерений, оно лучше характеризуется предельной относительной ошибкой

$$\delta = \frac{\Delta a}{a}. \quad (1.24)$$

Предельную относительную ошибку  $\delta$  чаще всего выражают в процентах. Вычислим ее для окончательного результата измерений примера 1.1 (табл. 1.1).

$$\text{Поскольку } d = (13,84 \pm 0,013) \text{ мм, то } \delta = \pm \frac{0,013}{13,84} 100\% \approx \pm 0,09\%.$$

Итак, если за критерий точности выбрана предельная абсолютная ошибка среднеарифметического, запись окончательного результата измерений будет иметь следующий вид:

$$X = a \pm \Delta a. \quad (1.25)$$

### Доверительный интервал

Запись (1.23) справедлива при достаточно большом числе измерений. В 1908 году вышла работа Уильяма Сили Госсета (псевдоним Стьюдент), в которой приведен статистический подход при определении ошибок для небольшого объема измерений (при числе опытов менее 30). При этом в случае  $n \rightarrow \infty$  распределение Стьюдента переходит в распределение Гаусса.

Если существует величина  $\alpha$  вероятности отличия результата измерений от истинного значения на величину не более, чем  $\Delta a_{\text{сл}}$ , она называется доверительной вероятностью, а интервал значений от  $X - \Delta a_{\text{сл}}$  до  $X + \Delta a_{\text{сл}}$  называется доверительным интервалом.

Абсолютная ошибка при малом количестве измерений определяется при помощи специального коэффициента, зависящего от надежности  $P$  и числа измерений  $n$  (коэффициент Стьюдента  $t_{\alpha, n}$ ).

Чем большим будет установлен доверительный интервал, тем вероятнее попадание истинного значения измеряемой величины  $X$  в этот интервал. Однако значительно широкий интервал дает меньше информации о величине  $X$ .

Если ограничиться учетом только случайных погрешностей для небольшого числа измерений  $n$  при доверительной вероятности  $P$ , полуширина доверительного интервала определяется в виде

$$\Delta a_{\text{сл}} = t_{\alpha, n} S. \quad (1.26)$$

Понятия «доверительный интервал» и «доверительная вероятность» означают, что, например, при  $\alpha = 0,95$  с надежностью 95 %, истинное значение величины  $X$  отличается от наиболее вероятностного значения измеряемой величины  $a$  (формула 1.3) не больше, чем на  $\pm \Delta a_{\text{сл}}$ . Значения коэффициента Стьюдента  $t_{\alpha, n}$  в зависимости от  $\alpha$  и  $n$  табулированы (табл. 1.2).

Таблица 1.2

Коэффициенты Стьюдента

$n$	Значения $P$				
	0,6	0,8	0,95	0,99	0,999
2	1,376	3,078	12,706	63,657	636,61
3	1,061	1,886	4,303	9,925	31,598
4	0,978	1,638	3,182	5,841	12,941
5	0,941	1,533	2,776	4,604	8,610

Окончание табл. 1.2

$n$	Значения $P$				
	0,6	0,8	0,95	0,99	0,999
6	0,920	1,476	2,571	4,032	6,859
7	0,906	1,440	2,447	3,707	5,959
8	0,896	1,415	2,365	3,499	5,405
9	0,889	1,397	2,306	3,355	5,041
10	0,883	1,383	2,262	3,250	4,781
11	0,879	1,372	2,228	3,169	4,587
12	0,876	1,363	2,201	3,106	4,437
13	0,873	1,356	2,179	3,055	4,318
14	0,870	1,350	2,160	3,012	4,221
15	0,868	1,345	2,145	2,977	4,140
16	0,866	1,341	2,131	2,947	4,073
17	0,865	1,337	2,120	2,921	4,015
18	0,863	1,333	2,110	2,898	3,965
19	0,862	1,330	2,101	2,878	3,922
20	0,861	1,328	2,093	2,861	3,883
21	0,860	1,325	2,086	2,845	3,850
22	0,859	1,323	2,080	2,831	3,819
23	0,858	1,321	2,074	2,819	3,792
24	0,858	1,319	2,069	2,807	3,767
25	0,857	1,318	2,064	2,797	3,745
26	0,856	1,316	2,060	2,787	3,725
27	0,856	1,315	2,056	2,779	3,707
28	0,855	1,314	2,052	2,771	3,690
29	0,855	1,313	2,048	2,763	3,674
30	0,854	1,311	2,045	2,756	3,659
31	0,854	1,310	2,042	2,750	3,646
40	0,851	1,303	2,021	2,704	3,551
60	0,848	1,296	2,000	2,660	3,460
120	0,845	1,289	1,980	2,617	3,373
$\infty$	0,842	1,282	1,960	2,576	3,291

Для окончательного определения границы доверительного интервала его необходимо расширить с учетом инструментальной погрешности прибора  $\Delta_{\text{и}}$ . Инструментальная погрешность указывается в инструкции к измерительному инструменту. При отсутствии таких сведений она принимается равной половине значения цены деления младшего разряда шкалы прибора.

В случае, когда случайная или инструментальная погрешность преобладает над другой, меньшей погрешностью можно пренебречь. Согласно [3] случайная погрешность считается пренебрежимо малой, если  $\Delta_{\text{и}} > 8S$ .

Инструментальной погрешностью можно пренебречь при  $\Delta_{\text{и}} < 0,8S$ .

При этом погрешность, возникающая из-за пренебрежения одной из составляющих при выполнении указанных неравенств, не превышает 15 %.

С учетом (1.18) границы погрешности результата измерений можно определить по формуле

$$\Delta = KS_{\Sigma}, \quad (1.19)$$

где  $K$  — коэффициент соотношения случайной и систематической (в т. ч. инструментальной) погрешностей;  $S_{\Sigma}$  — оценка общего среднеквадратичного отклонения результата измерения.

$$S_{\Sigma} = \sqrt{\frac{1}{3} \sum_{i=1}^m \Delta_i^2 + S^2}, \quad (1.20)$$

$$K = \frac{\Delta_{\text{сл}} + \Delta_{\text{сист}}}{S^2 + \sqrt{\frac{1}{3} \sum_{i=1}^m \Delta_i^2 + S^2}}, \quad (1.21)$$

где  $S$  — среднеквадратичная ошибка среднеарифметического случайной ошибки измерения;  $\Delta_i$  — граница  $i$ -й неисключенной систематической погрешности (погрешность метода, средств измерений, других источников).

При  $n \rightarrow \infty$ ,  $S \rightarrow 0$  случайная погрешность так же стремится к нулю. Однако нужно помнить о том, что эта погрешность уменьшается до тех пор, пока случайная ошибка не будет равной систематической. Так как количество числа измерений не влияет на систематическую ошибку, дальнейшее проведение измерений не целесообразно.

При обработке результатов прямых измерений можно руководствоваться следующей методикой:

1. Записываем результат каждого измерения в таблицу.

2. Вычисляем среднеарифметическое  $a = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i$ .

3. Находим вероятнейшие погрешности  $v_i = a - a_i$ .

4. Определяем квадраты погрешностей отдельных измерений  $v_1, v_2, \dots, v_n$ .
5. Вычисляем среднеквадратичную погрешность среднего арифметического  $S = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n v_i^2}$ .
6. Задаемся показателем надежности (обычно берут  $P = 0,95$ ).
7. Определяем коэффициент Стьюдента  $t_{\alpha, n}$  для заданных  $P$  и  $n$ .
8. Вычисляем доверительный интервал (погрешность измерения)  $\Delta a_{\text{сл}} = t_{\alpha, n} S$ .
9. В случае сопоставимости погрешности  $\Delta a_{\text{сл}}$  с инструментальной погрешностью  $\Delta_{\text{и}}$  доверительный интервал рассчитываем как  $\Delta = K S_{\Sigma}$ . При этом, если одна из ошибок окажется пренебрежимо меньше другой, ее можно отбросить.
10. Окончательный результат записываем в виде  $a \pm \Delta$ ,  $\delta$ .
11. Оцениваем относительную погрешность результата измерений:  $\delta = \frac{\Delta}{a} 100\%$ .

**Пример 1.2.** Измерим микрометром диаметр  $d$  круглого стержня (систематическая инструментальная погрешность составляет 0,005 мм). Результаты измерений занесем в табл. 1.3. Вычислим среднеарифметическое  $a$ , разности  $(d - a)$  и их квадраты.

Таблица 1.3

Результаты вычислений

$n$	$d$ , мм	$d - a$	$(d - a)^2$
1	4,01	+0,00	0,0000
2	3,99	−0,02	0,0004
3	3,96	−0,05	0,0025
4	4,02	+0,01	0,0001
5	4,05	+0,04	0,0016
6	4,03	+0,02	0,0004
$\Sigma$	24,06	—	0,0050

$$a = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^6 d_i = \frac{24,06}{6} = 4,01 \text{ мм.}$$

$$S = \sqrt{\frac{1}{6(6-1)} \sum_{i=1}^6 (d_i - a)^2} = \sqrt{\frac{0,0050}{6 \cdot 5}} = 0,01238 \text{ мм.}$$

Задавшись показателем надежности  $P = 0,95$ , из табл. 1.2 для шести измерений найдем коэффициент Стьюдента  $t = 2,57$ . Абсолютная ошибка по формуле (1.18)  $\Delta d = 0,01238 \cdot 2,57 = 0,04$ .

Вычислим отношение случайной и систематической ошибок

$$\frac{\Delta d}{\Delta_{\text{и}}} = \frac{0,04}{0,005} = 8,$$

следовательно, инструментальную погрешность  $\Delta_{\text{и}} = 0,005$  мм можно отбросить.

Окончательно запишем

$$d = 4,01 \pm 0,04 \text{ мм (при } P = 0,95); \delta = \frac{0,04}{4,01} 100\% \approx 1\%.$$

### Медианные ошибки

В качестве критериев точности измерений иногда пользуются так называемыми вероятными (медианными) ошибками. Их две:

1) медианная ошибка  $r$  отдельного измерения

$$r = \pm 0,674 \sqrt{\frac{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2}{n-1}} = 0,674 S_n \approx \frac{2}{3} S_n; \quad (1.22)$$

2) медианная ошибка среднеарифметического

$$R = \pm 0,674 \sqrt{\frac{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2}{n(n-1)}} \approx \frac{2}{3} \frac{S_n}{\sqrt{n}}. \quad (1.23)$$

Смысл этих ошибок заключается в следующем. Допустим, что мы измерили  $n$  раз какую-то физическую величину. Получится  $n$  случайных ошибок  $x_i$ . Если мы запишем все их в одну строку в порядке возрастания величины (т. е. без учета знака), то ошибка  $r$ , вычисленная по формуле (1.22), придется как раз на середину этой строки.

### 1.2.2. Сводная таблица критериев точности

Точность измерений можно оценивать по любым из восьми критериев:

$$S_n, h, r, x_{\text{пр}}, S, H, R, \Delta a.$$

Надо только обязательно указывать в своих научных статьях и технических отчетах, какой именно критерий был принят для оценки точности измерений. Все они связаны друг с другом простыми соотношениями.

#### Критерии точности измерений

Средняя квадратичная ошибка отдельного измерения	$S_n = \pm \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n v_i^2}{n-1}}$
Средняя ошибка отдельного измерения	$h = 0,8 S_n$
Модальная ошибка отдельного измерения	$r = \frac{2}{3} S_n$
Предельная случайная ошибка отдельного измерения	$x_{\text{пр}} = 3 S_n$
Средняя квадратичная ошибка среднеарифметического	$S = \frac{S_n}{\sqrt{n}}$
Средняя ошибка среднеарифметического	$H = 0,8 \frac{S_n}{\sqrt{n}}$
Модальная ошибка среднеарифметического	$R = \frac{2}{3} \frac{S_n}{\sqrt{n}}$
Предельная случайная ошибка среднеарифметического*	$\Delta a = 3 \frac{S_n}{\sqrt{n}}$

\* При небольшом числе параллельных измерений предпочтительнее пользоваться доверительными интервалами.

Какой критерий использовать, экспериментатор решает самостоятельно. Геодезисты почти всегда оценивают точность измерений посредством средней квадратичной оценки отдельного измерения  $S_n$ . Причина здесь в том, что, если при последовательных измерениях взять, например ошибку  $S$ , она довольно сильно уменьшается с ростом  $n$ , тогда как ошибка  $S_n$  более устойчива в этом отношении (рис. 1.2).

Из рисунка видно, что на практике не следует стремиться делать больше 12–15 измерений. В то же время при количестве измерений меньше 6–7 формула (1.16) становится слишком приближенной.

Для инженерных расчетов рекомендуется пользоваться предельной случайной ошибкой среднеарифметического значения количества проведенных измерений.

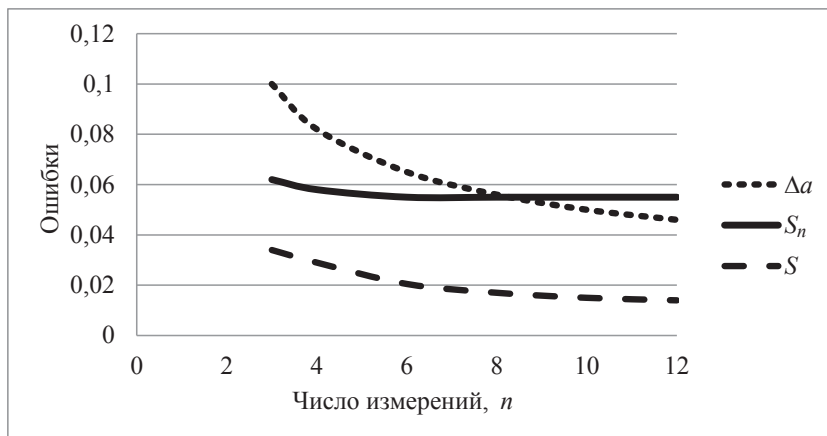


Рис. 1.2. Ошибки измерений

### 1.3. Правила округления чисел

#### Приближенные и точные числа. Значащие цифры в числе

Все числа разделяются на *точные* и *приближенные*, например, квадрат имеет 4 стороны — здесь число 4 является точным. Точным может быть и дробное число, так  $\sin 30^\circ = 0,5$ . Здесь дробное число 0,5 является точным числом.

В научно-технической практике чаще всего приходится иметь дело с такими числами, которые получаются в результате измерений. Они не являются точными из-за погрешностей при измерениях, их называют *приближенными*.

Значащей цифрой приближенного числа называется всякая цифра в его десятичном изображении, отличная от нуля и нуль, если он содержится между значащими цифрами или является представителем сохраненного десятичного разряда. Все остальные нули, входящие в состав приближенного числа и служащие лишь для обозначения его десятичных разрядов, не причисляются к значащим цифрам.

Так, в числе 0,008050 — четыре значащих цифры, а в 0,00805 — три (первые три нуля не являются значащими, а обозначают только разряды).

Бывают приближенные числа другого происхождения, например число  $\pi = 3,14159\dots$  или величина ускорения свободного падения  $g$  и др.



Указанные величины не являются абсолютно точными, и следует учесть их погрешность в общем результате измерений.

Оценка этих погрешностей осуществляется на основе следующего правила: *абсолютную погрешность нужно принимать равной половине единицы наименьшего разряда, представленного в числе.*

Это следует из соображений того, что в большинстве случаев последняя цифра в числе не является точной. Таким образом, если используется значение  $\pi = 3,142$ , то  $\Delta\pi = 0,0005$ .

### **Верные знаки и сомнительный знак в приближенном числе**

Верной цифрой называют ту цифру в числе, за точность которой можно ручаться. Поэтому в точном числе все цифры являются верными.

Говорят, что  $n$  первых значащих цифр (десятичных знаков) приближенного числа являются верными, если абсолютная погрешность этого числа не превышает половины единицы разряда, выражаемого  $n$ -й значащей цифрой, считая слева направо.

Например, для точного числа  $A = 35,97$  число  $a = 36,00$  является приближением с тремя верными знаками, так как  $A - a = 0,03 \leq \frac{1}{2} \cdot 0,1$ .

Приближенное число 1,5 отличается от 1,50. Запись 1,5 означает, что истинным числом может быть, например, 1,53 или 1,48, при этом верными являются цифры целых и десятых. Запись 1,50 означает, что верными являются и сотые доли, а число может быть 1,503 или 1,498, но не 1,531 и не 1,482.

Существует правило определения количества знаков в окончательном результате.

В первую очередь ограничиваются значащие цифры погрешности, при этом она записывается всегда с одной или двумя значащими цифрами из следующих соображений. Сама по себе величина случайной погрешности измерений является случайным числом (если провести измерения повторно, то получится и другая оценка для погрешности). А раз погрешность является случайной величиной, то, используя законы математической статистики, для нее можно определить доверительный интервал, и этот интервал оказывается весьма широким. При числе измерений  $n > 10$  относительная ошибка погрешности более 30 %. В связи с этим существует рекомендация записывать *две значащие цифры*, если первая из них 1 или 2, и *одну значащую цифру*, если она больше 3.

*После определения разряда погрешности результат вычислений округляется до того же разряда, что и у погрешности.*

**ТЕОРЕМА.** *Связь относительной погрешности приближенного числа с количеством верных знаков этого числа [4].*

Точность приближенного числа зависит не от количества значащих цифр, а от количества верных значащих цифр.

Если положительное приближенное число  $a$  имеет  $n$  верных десятичных знаков, то относительная погрешность  $\delta$  этого числа не превосходит  $\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$ , деленную на первую значащую цифру данного числа, т. е.

$$\delta \leq \frac{1}{a_m} \left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}, \quad (1.24)$$

где  $a_m$  — первая значащая цифра числа  $a$ .

**ТЕОРЕМА.** *Связь относительной погрешности приближенного числа с количеством верных знаков этого числа [4].*

Следствие. Если число  $a$  имеет больше двух верных знаков, т. е.  $n \geq 2$ , то практически справедлива формула

$$\delta \leq \frac{1}{2a_m} \left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}, \quad (1.25)$$

где  $a_m$  — первая значащая цифра числа  $a$ .

**Пример 1.3.** Какова предельная относительная погрешность, если вместо числа  $\pi$  взять число  $a = 3,14$ ?

Решение. В нашем случае  $a_m = 3$  и  $n = 3$ .

Следовательно,  $\delta \leq \frac{1}{2 \cdot 3} \left(\frac{1}{10}\right)^{3-1} = \frac{1}{6} \%$ .

**Пример 1.4.** Со сколькими десятичными знаками надо взять  $\sqrt{20}$ , чтобы погрешность не превышала 0,1 %?

Решение. Так как первая цифра 4, то  $a_m = 4$ , причем  $\delta = 0,001$ . Имеем  $\frac{1}{4 \cdot 10^{n-1}} \leq 0,001$ . Отсюда  $10^{n-1} \geq 250$  и  $n \geq 4$ .

## 1.4. Вычисление ошибок функции измеренных величин

Пусть на основании многократных измерений найдено, что диаметр и длина металлического цилиндра соответственно равны:  $d = (13,840 \pm 0,013)$  мм и  $l = (40,84 \pm 0,04)$  мм. Объем цилиндра можно

вычислить как  $V = \frac{\pi d^2}{4} l$ .

В данном случае объем представляет функцию от измеренных величин  $d$  и  $l$ , т.е. функцию от приближенных чисел. Таким образом, величина объема  $V$  тоже будет приближенным числом, имеющим определенную предельную ошибку  $\Delta V$ . Вычисление ошибки функции называется косвенным измерением.

### 1.4.1. Операции сложения и вычитания для приближенных чисел

**ТЕОРЕМА.** Абсолютная погрешность алгебраической суммы нескольких приближенных чисел не превышает суммы абсолютных погрешностей этих чисел [4].

**Доказательство.** Пусть  $x_1, x_2, \dots, x_n$  — данные приближенные числа. Рассмотрим их алгебраическую сумму  $u = \pm x_1 \pm x_2 \pm \dots \pm x_n$ .

Очевидно, что  $\Delta u = \pm \Delta x_1 \pm \Delta x_2 \pm \dots \pm \Delta x_n$  и, следовательно,

$$\Delta u \leq \Delta x_1 + \Delta x_2 + \dots + \Delta x_n.$$

**Следствие.** За предельную абсолютную погрешность алгебраической суммы можно принять сумму предельных абсолютных погрешностей слагаемых

$$\Delta n = \Delta x_1 + \Delta x_2 + \dots + \Delta x_n. \quad (1.26)$$

Отсюда следует, что предельная абсолютная погрешность суммы не может быть меньше предельной абсолютной погрешности наименее точного (в смысле абсолютной погрешности) из слагаемых.

Рассмотрим разность двух приближенных чисел  $u = x_1 - x_2$ . Предельная абсолютная погрешность разности  $\Delta u = \pm \Delta x_1 \pm \Delta x_2$  и, следовательно,

$$\Delta u \leq \Delta x_1 + \Delta x_2.$$

Таким образом, за предельную абсолютную погрешность алгебраической разности можно принять сумму предельных абсолютных погрешностей уменьшаемого и вычитаемого  $\Delta n = \Delta x_1 + \Delta x_2$ .

При этом *приближенные числа складывают, вычитают, умножают, делят, возводят в степень и т. п. по общеизвестным правилам, а действия с абсолютными ошибками производят отдельно от приближенных чисел.*

**Пример 1.5.** Сложить три числа:

$$a = 102,5 \pm 0,3; b = 13,62 \pm 0,04, c = 32,474 \pm 0,002.$$

Решение.

$$y = a + b + c = 102,5 + 13,62 + 32,474 = 148,594;$$

$$\Delta y = \Delta a + \Delta b + \Delta c = 0,3 + 0,04 + 0,002 = 0,342.$$

$$\text{Ответ: } y = 148,594 \pm 0,342.$$

В этом примере предельная абсолютная ошибка функции равна  $\pm 0,342$ . Старший разряд в числе 0,342 отмечен цифрой 3. А эта цифра обозначает десятые доли единицы. Поэтому в числе 148,594 сомнительной цифрой является та, которая тоже означает десятые доли единицы. В данном случае это цифра 5. Ее нужно сохранить, а все другие справа отбросить по правилу округления. В итоге получаем ответ:  $y = 148,6 \pm 0,3$ .

#### 1.4.2. Перемножение и возведение в степень приближенных чисел

**ТЕОРЕМА.** *Относительная погрешность произведения нескольких приближенных чисел, отличных от нуля, не превышает суммы относительных погрешностей этих чисел [4].*

Доказательство. Функция  $y = ab$  имеет предельную абсолютную ошибку  $\Delta y$ . Можно записать  $y \pm \Delta y = (a \pm \Delta a)(b \pm \Delta b)$ .

Выполним умножение по правилу алгебры:  $y \pm \Delta y = ab \pm a\Delta b \pm b\Delta a \pm \Delta a\Delta b$ .

Примем за нуль произведение ошибок  $\Delta a\Delta b$  ввиду его малости и вычтем почленно  $y = ab$ . Получим  $\pm \Delta y = \pm a\Delta b \pm b\Delta a$ .

Если разделить это равенство почленно на  $y = ab$ , можно записать выражение для предельной относительной ошибки

$$\delta = \frac{\Delta y}{y} = \pm \frac{\Delta a}{a} \pm \frac{\Delta b}{b}. \quad (1.27)$$

Таким образом, *предельная относительная погрешность произведения складывается из предельных относительных погрешностей сомножителей.*

Зная ошибку  $\delta$ , легко найдем предельную абсолютную ошибку искомой функции

$$\Delta y = \delta y. \quad (1.28)$$

**Пример 1.6.** Определить произведение  $u$  приближенных чисел  $x_1 = 12,2$  и  $x_2 = 73,56$  и число верных знаков в нем, если все написанные цифры сомножителей верные.

Решение.

Имеем  $\Delta x_1 = 0,05$  и  $\Delta x_2 = 0,005$ .

Отсюда  $\delta = \frac{0,05}{12,2} + \frac{0,005}{73,56} = 0,0042$ .

Так как произведение  $u = 897,432$ , то  $\Delta u = u\delta = 897,432 \cdot 0,0042 \cong 3,6$ . Первая цифра погрешности больше 2. Таким образом, разряд единиц является сомнительным в числе, и результат следует записать так:  $u = 897,4 \pm 4$ .

### Частные случаи применения правила

Отметим частный случай  $u = kx$ , где  $k$  — точный множитель, отличный от нуля.

Имеем

$$\delta_u = \delta_x, \quad (1.29)$$

так как относительная ошибка точного числа равна нулю и

$$\Delta u = k\Delta x, \quad (1.30)$$

т.е. при умножении приближенного числа на точный множитель  $k$  относительная предельная погрешность не изменяется, а абсолютная предельная погрешность увеличивается в  $k$  раз.

При возведении приближенного числа  $a$  в степень  $n$  будем иметь  $y = a^n = a \cdot a \dots a$ . Поэтому формула относительной погрешности принимает вид

$$\delta_y = \frac{\Delta y}{y} = \pm \left( \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta a}{a} + \dots + \frac{\Delta a}{a} \right) = \pm n \frac{\Delta a}{a}. \quad (1.31)$$

Так как извлечение корня степени  $p$  из приближенного числа  $a$  можно свести к возведению этого числа в степень  $\frac{1}{p}$ , будем иметь

$$\delta_y = \frac{\Delta y}{y} = \pm \frac{1}{p} \frac{\Delta a}{a}. \quad (1.32)$$

#### 1.4.3. Вывод общей формулы для предельной относительной ошибки функции

Пусть дана некоторая функция  $f$ , аргументами которой являются не зависящие между собой приближенные числа  $a$  и  $b$ , имеющие предельные абсолютные ошибки  $\Delta a$  и  $\Delta b$ . Так как величина  $y$  этой функции является приближенным числом, будем называть ее функцией измеренных величин

$$y = f(a, b). \quad (1.33)$$

Вычислим предельную ошибку сначала для функции одного аргумента

$$y = f(a). \quad (1.34)$$

Если при изменении аргумента  $a$  допускается предельная абсолютная ошибка  $\Delta a$ , то функция  $y$  получает изменение  $\Delta y$ :  $y \pm \Delta y = f(a \pm \Delta a)$ .

Вычтем отсюда равенство (1.34) почленно и разделим обе части на  $\Delta a$ :

$$\pm \frac{\Delta y}{\Delta a} = \frac{f(a \pm \Delta a) - f(a)}{\Delta a}. \quad (1.35)$$

Из математического анализа известно, что правая часть этого равенства хотя и не равна производной по  $a$  от функции  $f(a)$ , но отличается от нее лишь на бесконечно малую величину  $\theta$ . Поэтому можно записать  $\pm \frac{\Delta y}{\Delta a} = f'(a) + \theta$ .

Умножим обе части равенства на  $\Delta a$ :  $\pm \Delta y = f'(a) \Delta a + \theta \Delta a$ .

Так как  $\Delta a$  очень малая величина, то произведение  $\theta \Delta a$  является величиной второго порядка малости и им можно пренебречь:

$$\Delta y = \pm f'(a) \Delta a. \quad (1.36)$$

Сформулируем полученный результат: *предельная абсолютная ошибка функции одного аргумента равна производной от этой функции на предельную абсолютную ошибку аргумента.*

Разделим равенство (1.36) на равенство (1.34):

$$\frac{\Delta y}{y} = \pm \frac{f'(a)}{f(a)} \Delta a. \quad (1.37)$$

Так как отношение производной функции на саму функцию является производной по аргументу ее натурального логарифма, можно записать

$$\delta = \pm [\ln f(a)]' \Delta a. \quad (1.38)$$

Это правило звучит так: *предельная относительная ошибка функции одного аргумента равна произведению производной от логарифма этой функции на предельную абсолютную ошибку аргумента.*

Перейдем к выводу формулы для предельной относительной ошибки функции двух независимых аргументов.

Если аргумент  $a$  испытает изменение  $\pm \Delta a$ , но аргумент  $b$  временно сохранится неизменным, то функция (1.33) получит частное приращение  $\Delta y_1$ :

$$\Delta y_1 = f(a \pm \Delta a, b) - f(a, b). \quad (1.39)$$

После математических преобразований получим частную ошибку

$$\delta_1 = \left| \frac{\partial}{\partial a} \ln f(a, b) \Delta a \right|. \quad (1.40)$$

Если же аргумент  $b$  испытает изменение  $\pm \Delta b$ , но аргумент  $a$  временно сохранится неизменным, то функция (1.33) получит частное приращение  $\Delta y_2$  и соответственно частную относительную ошибку  $\delta_2$ .

Чтобы получить предельную относительную ошибку функции, надо арифметически сложить частные относительные ошибки

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 = \pm \left[ \left| \frac{\partial}{\partial a} \ln f(a, b) \right| \Delta a + \left| \frac{\partial}{\partial b} \ln f(a, b) \right| \Delta b \right]. \quad (1.41)$$

Предельная относительная ошибка функции  $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  нескольких аргументов складывается из частных относительных ошибок

$$\delta = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial}{\partial x_i} \ln u \cdot \Delta x_i \right|. \quad (1.42)$$

Применяя формулу (1.42) к частным случаям, можно вычислить предельную относительную ошибку:

Вид функции $y = f(a, b, c, \dots)$	Предельная относительная ошибка функции $\delta$
$y = \frac{N}{a}$	$\frac{\Delta a}{a}$
$y = N(a + b + c)$	$\frac{\Delta a + \Delta b + \Delta c}{a + b + c}$
$y = N(a - b)$	$\frac{\Delta a + \Delta b}{a - b}$
$y = Na^n$	$n \frac{\Delta a}{a}$
$y = \sqrt[p]{a}$	$\frac{1}{p} \frac{\Delta a}{a}$
$y = Nabc$	$\frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b} + \frac{\Delta c}{c}$
$y = N \frac{a}{b}$	$\frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b}$
$y = Na^p b^q c^r$	$p \frac{\Delta a}{a} + q \frac{\Delta b}{b} + r \frac{\Delta c}{c}$
$y = N \frac{a^p}{b^q c^r}$	$p \frac{\Delta a}{a} + q \frac{\Delta b}{b} + r \frac{\Delta c}{c}$
$y = N \sin(x)$	$\operatorname{ctg}(x) \Delta x$
$y = N \cos(x)$	$\operatorname{tg}(x) \Delta x$
$y = \frac{a^p}{b^q \pm c^r}$	$p \frac{\Delta a}{a} + \frac{qb^{q-1} \Delta b + rc^{r-1} \Delta c}{b^q \pm c^r}$

\*  $N$  — точное число.

#### 1.4.4. Средняя квадратичная ошибка функции

Вычисленная ранее погрешность для функции нескольких переменных при косвенных измерениях относится к единичному измерению, если проводится ряд замеров, необходимо пользоваться формулами среднеквадратичной ошибки



$$S_y = \pm \sqrt{\sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_i} S_{x_i} \right)^2} \quad (1.43)$$

или

$$S_y = \pm \bar{y} \sqrt{\sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial \ln f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_i} S_{x_i} \right)^2}, \quad (1.44)$$

где  $\bar{y}$  — среднеарифметическое значение функции.

Применим формулу (1.43) к функции следующего вида:

$$y = f(a, b) = a + b,$$

то есть требуется найти среднюю квадратичную ошибку суммы двух приближенных чисел, средние квадратичные ошибки которых  $S_a$  и  $S_b$ .

Решение:  $\frac{\partial}{\partial a} f(a, b) = 1$ ;  $\frac{\partial}{\partial b} f(a, b) = 1$ , следовательно,  $S_y = \pm \sqrt{S_a^2 + S_b^2}$ .

**Пример 1.7.** Для определения модуля Юнга  $E$  по прогибу стержня прямоугольного сечения применяется формула

$$E = \frac{1}{4} \frac{l^3 p}{a^3 b s},$$

где  $l$  — длина стержня;  $a$  и  $b$  — измерения поперечного сечения стержня;  $s$  — стрела прогиба;  $p$  — нагрузка.

Вычислить предельную относительную погрешность при определении модуля Юнга  $E$ , %, если

$$p = 200 \text{ Н}; \delta_p = 0,1;$$

$$a = 3 \text{ мм}; \delta_a = 1,0;$$

$$b = 44 \text{ мм}; \delta_b = 1,0;$$

$$l = 50 \text{ см}; \delta_l = 1,0;$$

$$s = 2,5 \text{ см}; \delta_s = 1,0.$$

$$\text{Решение: } \ln E = 3 \ln l + \ln p - 3 \ln a - \ln b - \ln s - \ln 4.$$

Заменяя приращение дифференциалами по модулю, будем иметь

$$\frac{\Delta E}{E} = 3 \frac{\Delta l}{l} + \frac{\Delta p}{p} + 3 \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b} + \frac{\Delta s}{s}.$$

Следовательно,  $\delta E = 0,081$ , т. е. примерно 8 % от измеряемой величины. Произведя численные расчеты, имеем  $E = (2,1 \pm 0,17) 10^6 \text{ Н/см}^3$ .

### 1.4.5. Погрешности средств измерений

Погрешности, зависящие от точности изготовления и градуировки измерительного прибора, называют инструментальными. Такие погрешности регламентируются ГОСТами.

*В случае отсутствия сведений о допустимой погрешности (например, у линейки) погрешность принимают равной половине цены деления прибора.*

В табл. 1.4 приведены примеры допустимых погрешностей наиболее часто встречающихся средств измерения.

Таблица 1.4

Погрешности средств измерений

Инструменты	Пределы измерения	Цена деления	Погрешность
Линейки металлические с ценой деления 1 мм	до 300 мм	1 мм	0,1 мм
	до 1000 мм	1 мм	0,2 мм
Мензурка	до 250 мл	1 мл	1 мл
Штангенциркуль с нониусом 50 мкм	0–125 мм	100 мкм	50 мкм
Микрометр	25 мм	10 мкм	5 мкм
Динамометр	4 Н	0,1 Н	0,05 Н
Секундомер	0–30 мин	0,2 с	1 с за 30 мин
Барометр-анероид	720–780 мм рт. ст.	1 мм рт. ст.	3 мм рт. ст.
Термометр ртутный стеклянный типа ТЛ-2	0–100 °С	1 °С	1 °С
	100–200 °С		2 °С
	200–300 °С		3 °С
	300–400 °С		4 °С

### Класс точности электроизмерительных приборов

Для стрелочных электроизмерительных приборов вводятся классы точности, определяющие допустимые значения погрешностей. Классы точности обозначаются на шкалах приборов числами 0,1; 0,2; 0,5; 1,0; 1,5; 2,5; 4,0, которые показывают процентное содержание абсолютной погрешности в размерности полной шкалы прибора. Если на шкале нет обозначения, приведенная погрешность прибора составляет более 4 %.

Если обозначить  $\gamma$  как класс точности, а  $A_{\max}$  — максимальное значение шкалы прибора, абсолютная инструментальная погрешность определится так:

$$\Delta_{\text{и}} = \frac{\gamma A_{\text{max}}}{100}. \quad (1.45)$$

Следовательно, абсолютная инструментальная погрешность прибора класса 1,5 составляет 1,5 % от его шкалы.

### **Погрешность отсчета**

При снятии показаний с прибора возникает погрешность отсчета  $\Delta_{\text{о}}$ . Она возникает от недостаточно точного отсчитывания показаний средств измерений. Принято принимать эту погрешность равной половине цены деления.

### **Полная абсолютная погрешность измерений**

При прямых измерениях физической величины  $A$  нужно оценивать все погрешности: инструментальную, погрешность отсчета, случайную погрешность. При этом должна быть проведена предварительная работа по исключению грубых и систематических ошибок измерений.

В результате общая абсолютная погрешность определится как

$$\Delta_{\text{общ}} = \Delta_{\text{и}} + \Delta_{\text{о}} + \Delta_{\text{сл}}. \quad (1.46)$$

Результат измерения физической величины  $A$  рекомендуется записывать в виде

$$A = A_{\text{ср}} \pm \Delta_{\text{общ}}, \quad \delta = \Delta_{\text{общ}} A_{\text{ср}} 100 \%. \quad (1.47)$$

Здесь  $A_{\text{ср}}$  — значение физической величины, полученное экспериментально. Для серии одинаковых измерений записывается среднее арифметическое.

Если проводится обработка результатов косвенных измерений физической величины, которая связана с величинами  $A$ ,  $B$  и  $C$ , первоначально вычисляется относительная погрешность косвенного измерения  $\delta$ , а затем — абсолютная ошибка.

Итоговый результат записывается аналогично прямым измерениям.

**Пример 1.8.** Необходимо определить погрешность измерения коэффициента трения бруска, равномерно перемещаемого с помощью динамометра по горизонтальной плоскости. Измеряемая сила равна силе трения скольжения. Вес бруска  $N = 1,82 \text{ Н}$ .

Коэффициент трения скольжения можно определить как  $\mu = \frac{F_{\text{тр}}}{N}$ ,

где  $N = mg$ .

Динамометром определим силу трения  $F_{\text{тр}} = 0,61$  Н, тогда коэффициент трения составит  $\mu = 0,33$ .

Инструментальная погрешность динамометра равна  $\Delta_{\text{и}}F = 0,05$  Н, погрешность отсчета (половина цены деления) составит  $\Delta_{\text{о}}F = 0,05$  Н.

Абсолютная погрешность определения веса  $\Delta N = 0,1$  Н.

Относительную косвенную погрешность измерения согласно табл. 1.5 можно вычислить по зависимости

$$\delta = \frac{\Delta_{\text{и}}F + \Delta_{\text{о}}F}{F} + \frac{\Delta N}{N} = \frac{0,05 + 0,05}{1,82} + \frac{0,1}{0,61} = 0,22.$$

Соответственно абсолютная погрешность косвенного измерения  $\mu$  составит  $\Delta = 0,33 \cdot 0,22 = 0,074$ .

Ответ:  $\mu = 0,33 \pm 0,074$ ,  $\delta = 22\%$ .

## 1.5. Обработка результатов измерений

### Регрессионный анализ

Регрессионный анализ — это метод, позволяющий установить аналитическую зависимость между выходной и входными величинами по данным эксперимента.

Допустим, определена зависимость величины  $y$  от набора факторов  $x_1, x_2, \dots, x_k$ . Опыты проводились для  $n$  серий при различных сочетаниях уровней факторов, при этом для каждой серии и  $i$ -го сочетания уровней факторов определена выборка значений величины  $y$ . Вычисляется среднее по выборке  $\bar{y}_i$  и дисперсия  $S_{y_i}^2$ . Полученная зависимость описывается в виде некоторой функции  $\hat{y} = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ , которая имеет  $m$  неизвестных коэффициентов или показателей степеней  $b_1, b_2, \dots, b_m$ .

Нужно найти такое сочетание этих параметров, при котором расчетные значения будут наиболее близки к экспериментальным данным  $y_i$ .

Можно выделить два основных подхода к нахождению коэффициентов уравнения регрессии  $b_j$ .

Первый способ — интерполирование.

При этом расчетные значения функции совпадают с экспериментальными в некоторых опорных (узловых) точках  $y_i$ .

Во втором случае неизвестная функция  $f(x)$  описывается более простой функцией  $\varphi(x)$ , называемой аппроксимацией. Аппроксимирующую функцию  $\varphi(x)$  подбирают таким образом, чтобы отклонение  $\varphi(x)$  от  $f(x)$  в заданной области было наименьшим.

В научных исследованиях, особенно когда известен закон изменения параметра, более предпочтительно *аппроксимировать* экспериментальные точки наперед заданной математической функцией, описывающей исследуемый процесс.

Наиболее распространенным методом поиска коэффициентов уравнений регрессии является *метод наименьших квадратов*. При наличии зависимости некоторой величины  $y$  от величины  $x$  можно выполнить исследования, в результате которых получится ряд значений [5]:

$$x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n;$$

$$y_1, y_2, \dots, y_i, \dots, y_n.$$

По этим данным можно построить график  $y = f(x)$  и иметь представление о виде функции  $f(x)$ . Для определения неизвестных коэффициентов применяется метод наименьших квадратов. Так как экспериментальные точки, как правило, не совпадают с расчетными значениями, по методу наименьших квадратов требуется минимизация суммы квадратов отклонений  $[y_i - f(x_i)]^2$ .

На практике этот метод в основном применяется для линейной зависимости, когда  $y = kx$  или  $y = a + bx$ .

Когда зависимость нелинейная, методом преобразований получают опять-таки линейную функцию.

Рассмотрим функцию  $y = kx$  (линия, пересекающая начало координат на рис. 1.3).

Определим сумму квадратов отклонений экспериментальных точек от прямой:

$$\phi = \sum_{i=1}^n (y_i - kx_i)^2. \quad (1.48)$$

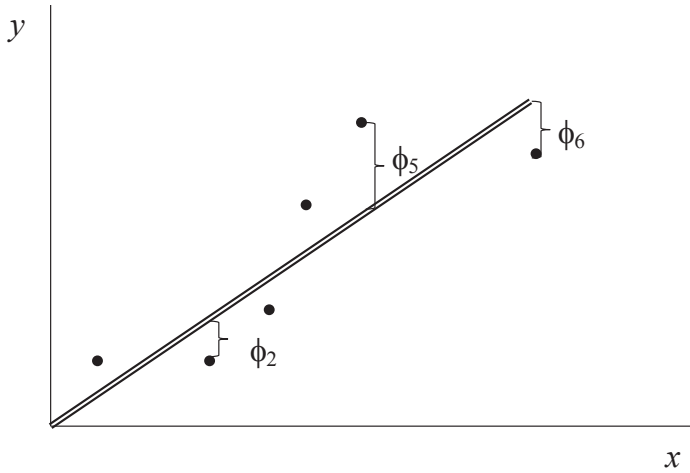


Рис. 1.3. График функции

Для определения  $k$ , при котором  $\phi$  будет минимальна, вычислим экстремум этой функции:

$$\frac{d\phi}{dk} = -2 \sum_{i=1}^n x_i (y_i - kx_i) = 0. \quad (1.49)$$

Тогда

$$k = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2}. \quad (1.50)$$

Среднеквадратичная ошибка определения  $k$  при  $n$  измерениях определяется как

$$S_k = \sqrt{\frac{1}{n-1} \frac{\sum (y_i - kx_i)^2}{\sum x_i^2}}. \quad (1.51)$$

Для случая, когда прямая не проходит через начало координат ( $y = a + bx$ ), необходимо по имеющемуся набору значений  $x_i, y_i$  определить наилучшие значения коэффициентов  $a$  и  $b$ .

Составим опять квадратичную формулу  $\phi$ , равную сумме квадратов отклонений экспериментальных точек  $x_i, y_i$  от прямой,

$$\phi = \sum_{i=1}^n (y_i - a - bx_i)^2 \quad (1.52)$$

и вычислим значения коэффициентов  $a$  и  $b$ , при которых частные производные  $\phi$  равны нулю:

$$\frac{d\phi}{da} = -2 \sum_{i=1}^n (y_i - a - bx_i) = 0. \quad (1.53)$$

$$\frac{d\phi}{db} = -2 \sum_{i=1}^n x_i (y_i - a - bx_i) = 0. \quad (1.54)$$

Решением этих уравнений будет

$$b = \frac{\sum [(x_i - \bar{x}) y_i]}{\sum (x_i - \bar{x})^2}, \quad (1.55)$$

$$a = \bar{y} - b\bar{x}, \quad (1.56)$$

где

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i); \quad (1.57)$$

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i) \quad (1.58)$$

или

$$b = \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}; \quad (1.59)$$

$$a = \frac{\sum y_i \sum x_i^2 - \sum x_i \sum x_i y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}. \quad (1.60)$$

Среднеквадратичные ошибки  $a$  и  $b$  вычисляются как

$$S_b = \sqrt{\frac{1}{n-2} \frac{\sum (y_i - bx_i - a)^2}{\sum (x_i - \bar{x})^2}}; \quad (1.61)$$

$$S_a = \sqrt{\frac{\sum (y_i - bx_i - a)^2}{n-2} \left( \frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{\sum (x_i - \bar{x})^2} \right)}. \quad (1.62)$$

В практике математической обработки опытных данных широко используются нелинейные формулы, достаточно просто преобразуемые к линейному виду.

Так, параболическая зависимость вида  $y = a + bx^2$  приводится к линейному виду подстановкой  $z = x^2$ . Коэффициенты полученного ли-

нейного уравнения  $y = a + bz$  находятся по описанной выше методике.

Степенные зависимости вида  $y = ax^b$  приводятся к полиномиальному виду путем логарифмирования  $\ln y = \ln a + b \ln x$ . Вводя новые переменные, получим  $k = m + bz$ , где  $k = \ln y$ ,  $m = \ln a$ ,  $z = \ln x$ .

### Модели множественной линейной регрессии

Модель множественной линейной регрессии представлена уравнением

$$y^p = b_0 + \sum_{j=1}^k b_j x_j.$$

Задача состоит в том, чтобы получить такие значения коэффициентов  $b_0, b_1, \dots, b_k$ , при которых сумма квадратов ошибок (разностей между данными, предсказываемыми регрессионной моделью, и выборкой из  $n$  экспериментальных данных) является минимальной. Функция ошибки при этом

$$\phi = \sum_{i=1}^n \left( b_0 + \sum_{j=1}^k b_j x_{ji} - y_i \right)^2.$$

Для минимизации функции  $\Phi$  положим

$$\frac{\partial \phi}{\partial b_0} = \frac{\partial \phi}{\partial b_1} = \dots = \frac{\partial \phi}{\partial b_k} = 0.$$

В матричном виде система линейных уравнений для определения коэффициентов модели имеет вид

$$\begin{pmatrix} n & \sum_{i=1}^n x_{1i} & \sum_{i=1}^n x_{2i} & \dots & \sum_{i=1}^n x_{ki} \\ \sum_{i=1}^n x_{1i} & \sum_{i=1}^n x_{1i}^2 & \sum_{i=1}^n x_{1i} x_{2i} & \dots & \sum_{i=1}^n x_{1i} x_{ki} \\ \sum_{i=1}^n x_{2i} & \sum_{i=1}^n x_{2i} x_{1i} & \sum_{i=1}^n x_{2i}^2 & \dots & \sum_{i=1}^n x_{2i} x_{ki} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{i=1}^n x_{ki} & \sum_{i=1}^n x_{ki} x_{1i} & \sum_{i=1}^n x_{ki} x_{2i} & \dots & \sum_{i=1}^n x_{ki}^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n y_i \\ \sum_{i=1}^n x_{1i} y_i \\ \sum_{i=1}^n x_{2i} y_i \\ \dots \\ \sum_{i=1}^n x_{ki} y_i \end{pmatrix}. \quad (1.48)$$



**Пример 1.9.** Проведены измерения углового ускорения  $\varepsilon$  некоторого тела при различных значениях момента  $M$  (основное уравнение динамики вращательного движения  $\mu = \frac{M}{J}$ ). Необходимо вычислить момент инерции  $J$  этого тела.

После проведения эксперимента получились следующие результаты (табл. 1.5).

Таблица 1.5

Результаты измерений

$n$	$M, \text{Н}\cdot\text{м}$	$\varepsilon, \text{с}^{-1}$	$M^2$	$M\varepsilon$	$\varepsilon - kM$	$(\varepsilon - kM)^2$
1	1,44	0,52	2,0736	0,7488	0,039432	0,001555
2	3,12	1,06	9,7344	3,3072	0,018768	0,000352
3	4,59	1,45	21,0681	6,6555	-0,08181	0,006693
4	5,90	1,92	34,81	11,328	-0,049	0,002401
5	7,45	2,56	55,5025	19,072	0,073725	0,005435
$\Sigma$	—	—	123,1886	41,1115	—	0,016436

Применим метод наименьших квадратов. Для этого первоначально выразим  $k = \frac{1}{J}$ .

По формуле (1.50) определяем

$$k = \frac{1}{J} = \frac{\sum M\varepsilon}{\sum M^2} = \frac{41,1115}{123,1886} = 0,3337 \text{ кг}^{-1} \text{ м}^{-2}.$$

Отсюда  $J = 2,996 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ .

По (1.51) вычислим среднеквадратичную ошибку

$$S_k = S_{(1/J)} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \frac{\sum (y_i - kx_i)^2}{\sum x_i^2}} = \sqrt{\frac{1}{(5-1)} \frac{0,016436}{123,1886}} = 0,005775.$$

По зависимости (1.44) имеем

$$S_J = S_{(1/k)} = \frac{1}{k} \sqrt{\left( \frac{\partial \ln \frac{1}{k}}{\partial k} \right)^2} S_k^2 = S_k \frac{1}{k} \sqrt{\left( -\frac{1}{k^2 \frac{1}{k}} \right)^2} = \frac{1}{k^2} S_k = \frac{0,005775}{0,3337^2} = 0,05186.$$

Для  $P = 0,95$  и  $n = 5$ , по таблице коэффициентов Стьюдента,  $t = 2,78$ . Абсолютная ошибка определится как

$$\Delta J = 2,78 \cdot 0,05186 = 0,144 \approx 0,14 \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

Результаты можно записать в следующем виде:

$$J = 3,00 \pm 0,14 \text{ кг} \cdot \text{м}^2; \varepsilon = \frac{\Delta J}{J} 100\% = \frac{0,14}{3} 100\% = 4,67\%.$$

**Пример 1.10.** Требуется вычислить температурный коэффициент сопротивления металлического изделия.

Известно, что сопротивление выражается от температуры линейной зависимостью

$$R_t = R_0(1 + \alpha t) = a + bt,$$

где  $a = R_0$ ;  $b = R_0 \alpha$ .

Проведем измерения и запишем результаты расчетов в табл. 1.6.

Таблица 1.6

Результаты измерений

$n$	$t^\circ, \text{с}$	$r, \text{Ом}$	$t - \bar{t}$	$(t - \bar{t})^2$	$(t - \bar{t})r$	$r - bt - a$	$(r - bt - a)^2 10^6$
1	23	1,242	-62,8333	3948,028	-78,039	0,007673	58,8722
2	59	1,326	-26,8333	720,0278	-35,581	-0,00353	12,4959
3	84	1,386	-1,83333	3,361111	-2,541	-0,00965	93,1506
4	96	1,417	10,16667	103,3611	14,40617	-0,01039	107,898
5	120	1,512	34,16667	1167,361	51,66	0,021141	446,932
6	133	1,520	47,16667	2224,694	71,69333	-0,00524	27,4556
$\Sigma$	515	8,403	—	8166,833	21,5985	—	746,804
$\Sigma/n$	85,833	1,4005	—	—	—	—	—

По формулам (1.59), (1.60) вычислим

$$b = R_0 \alpha = \frac{\sum [(t_i - \bar{t}) R_i]}{\sum (t_i - \bar{t})^2} = \frac{21,5985}{8166,833} = 0,002645 \text{ Ом/град};$$

$$a = R_0 = \bar{R} - a R_0 \bar{t} = 1,4005 - 0,002645 \cdot 85,83333 = 1,1735 \text{ Ом}.$$

Соответственно

$$\alpha = \frac{b}{a} = \frac{0,002645}{1,1735} = 0,00225 \text{ град}^{-1}.$$

Найдем погрешность вычисления  $\alpha$ .

Так как  $\alpha = \frac{\alpha R_0}{R_0}$ , то согласно (1.43) имеем

$$S_\alpha = \pm \sqrt{\left[ \frac{\partial}{\partial(\alpha R_0)} \left( \frac{\alpha R_0}{R_0} \right) \right]^2 S_{\alpha R_0}^2 + \left[ \frac{\partial}{\partial(R_0)} \left( \frac{\alpha R_0}{R_0} \right) \right]^2 S_{R_0}^2}.$$

Используя зависимости (1.61), (1.62), определим

$$\begin{aligned} S_{\alpha R_0} &= \sqrt{\frac{\sum (R_i - bt_i - a)^2}{(n-2) \sum (t_i - \bar{t})^2}} = \sqrt{\frac{0,000746804}{(6-2)8166,833}} = 1,51 \cdot 10^{-4} \text{ Ом/град}; \\ S_{R_0} &= \sqrt{\left( \frac{\sum (R_i - bt_i - a)^2}{(n-2)} \right) \left( \frac{1}{n} + \frac{\bar{t}^2}{\sum (t_i - \bar{t})^2} \right)} = \\ &= \sqrt{\frac{0,000746804}{(6-2)} \left( \frac{1}{6} + \frac{85,83333^{-2}}{8166,833} \right)} = 0,014126 \text{ Ом}. \end{aligned}$$

Соответственно

$$\begin{aligned} S_\alpha &= \pm \sqrt{\left[ \frac{1}{R_0} \right]^2 S_{\alpha R_0}^2 + \left[ -\frac{\alpha}{R_0} \right]^2 S_{R_0}^2} = \sqrt{\left( \frac{1,51 \cdot 10^{-4}}{1,1735} \right)^2 + \left( \frac{0,00225 \cdot 0,014126}{1,1735} \right)^2} = \\ &= 1,32 \cdot 10^{-4} \text{ град}^{-1}. \end{aligned}$$

Для  $P = 0,95$  и  $n = 6$  коэффициент Стьюдента  $t = 2,57$ .

Абсолютная ошибка  $\Delta\alpha = 2,57 \cdot 0,000132 = 0,000338 \text{ град}^{-1}$ .

**Ответ:**  $\alpha = (23 \pm 4) \cdot 10^{-4} \text{ град}^{-1}$  при  $P = 0,95$ .

$$\varepsilon = \frac{\Delta\alpha}{\alpha} 100\% = \frac{4}{23} 100\% \approx 20\%.$$

**Пример 1.11.** Определить погрешность вычисления экспериментального значения функции фракционного извлечения узкого класса крупности сыпучего материала в мелкий продукт при воздушной сепарации измельченного диоксида кремния [6].

В ходе лабораторного эксперимента на пневматическом классификаторе получено два продукта. Вес мелкого материала составил — 1200 г, крупного — 2300. После обработки результатов экспериментов для фракции 0,4 мм было вычислено значение функции фракционного разделения, которое составило 33 % или 0,33 ед., частный остаток  $r_m$  мелкого материала на сетке 400 мкм равен 35 г; частный остаток крупного продукта  $r_k = 90$  %.

Функция фракционного разделения рассчитывается по формуле

$$\Phi_m = \frac{r_m \gamma_m}{r_{исх}},$$

где  $r_m$  — частный весовой остаток ситового рассева мелкого продукта на смежных сетках, % (определяется взвешиванием на электронных весах с точностью до 0,1 г, общая навеска пробы — 100);  $r_{исх}$  — частный остаток исходного материала на смежных сетках, % (определяется по формуле  $r_{исх} = r_m \gamma_m + r_k \gamma_k$ );  $r_k$  — частный весовой остаток ситового рассева крупного продукта на смежных сетках, % (определяется взвешиванием на электронных весах с точностью до 0,1 г);  $\gamma_m$  — выход мелкого продукта, %.

Выход  $\gamma_m$  вычисляется как отношение массы мелкого продукта  $G_m$ , полученного при фракционировании порошка, к массе исходного материала  $G_k$  (вес определяется взвешиванием на стрелочных весах с точностью до 1 г, класс прибора 0,1 при шкале измерения до 1000 г):

$$\gamma_m = \frac{G_m}{G_k}.$$

В данном примере  $G_m = 1200$  г,  $G_k = 2300$ .

При определении частных остатков необходимо учесть допускаемое отклонение от номинального значения для среднего арифметического размера сторон ячеек сеток в свету.

Согласно ГОСТ 3826–82 «Сетки провололочные тканые с квадратными ячейками. Технические условия» остаток можно принять равным 6 % для сеток с размером от 0,4 до 4 мм.

Запишем конечную формулу вычисления функции  $\Phi_m$ :

$$\Phi_m = \frac{r_m \frac{G_m}{G_k}}{r_m \frac{G_m}{G_k} + r_k \frac{G_k}{G_k}} = \frac{r_m G_m}{r_m G_m + r_k G_k} = \frac{1}{1 + \frac{r_k G_k}{r_m G_m}}.$$

Определим абсолютные погрешности исходных величин.

Абсолютная погрешность определения частных остатков складывается:

- из случайной погрешности взвешивания пробы материала на весах. Из опыта обработки экспериментальных данных примем ошибку взвешивания

$$\Delta_{\text{сл}} = 0,01;$$

- инструментальной погрешности прибора. Так как точность весов ограничивается 0,1 г, сотые доли грамм будут сомнительным знаком в числе, поэтому примем

$$\Delta_{\text{и}} = 0,05;$$

- погрешности изготовления сеток. Максимальный размер взвешиваемой фракции составляет 630 мкм. Погрешность сетки составляет

$$\Delta_{\text{с}} = 0,06 \cdot 0,63 = 0,0378.$$

Общая погрешность определения  $r$  :

$$\Delta_r = 0,01 + 0,05 + 0,0378 = 0,0978 \approx 0,1.$$

Абсолютная погрешность взвешивания крупного, мелкого и исходного продуктов складывается:

- из случайной погрешности взвешивания пробы материала на весах

$$\Delta_{\text{сл}} = 0,01;$$

- инструментальной погрешности прибора. Для класса точности 0,1 и максимальном значении шкалы 1000 г погрешность определяется так:

$$\Delta_{\text{и}} = \frac{\gamma_{\text{пр}} A_{\text{max}}}{100} = \frac{0,1 \cdot 1000}{100} = 1;$$

- погрешности отсчета, равной половине цены деления стрелочного прибора

$$\Delta_{\text{о}} = 0,5.$$

Общая погрешность взвешивания составит

$$\Delta_G = 0,01 + 1 + 0,5 = 1,51 \approx 1,5.$$

Согласно правилу определения предельной относительной ошибки функции произвольного вида выполним следующие операции:

1. Прологарифмируем функцию  $f(a, b, c \dots)$ ;
2. Вычислим частные производные по каждому аргументу  $a, b, c \dots$ ;
3. Умножим каждую частную производную на предельную абсолютную ошибку своего аргумента и сложим их вместе. Это и будет предельная относительная ошибка функции.

Общая формула для вычисления предельной относительной ошибки функции записывается в виде (1.42).

Прологарифмируем искомую функцию

$$\ln \Phi_M = \ln \frac{1}{1 + \frac{r_K G_K}{r_M G_M}} = \ln 1 - \ln \left( 1 + \frac{r_K G_K}{r_M G_M} \right).$$

Возьмем частные производные

$$\frac{d \ln \Phi_M}{dr_K} = \left| - \frac{1}{\left( 1 + \frac{r_K G_K}{r_M G_M} \right)} \frac{G_K}{r_M G_M} \right| = \frac{2300}{\left( 1 + \frac{90 \cdot 2300}{35 \cdot 1200} \right) 35 \cdot 1200} = 0,0092;$$

$$\frac{d \ln \Phi_M}{dr_M} = \left| \frac{1}{\left( 1 + \frac{r_K G_K}{r_M G_M} \right)} \frac{r_K G_K}{(r_M)^2 G_M} \right| = \frac{90 \cdot 2300}{\left( 1 + \frac{0,90 \cdot 2300}{0,35 \cdot 1200} \right) 35^2 \cdot 1200} = 0,0238;$$

$$\frac{d \ln \Phi_M}{dG_M} = \left| \frac{1}{\left( 1 + \frac{r_K G_K}{r_M G_M} \right)} \frac{r_K G_K}{r_M (G_M)^2} \right| = \frac{90 \cdot 2300}{\left( 1 + \frac{90 \cdot 2300}{35 \cdot 1200} \right) 35 \cdot 1200^2} = 6,9 \cdot 10^{-4};$$

$$\frac{d \ln \Phi_M}{dG_K} = \left| \frac{1}{\left( 1 + \frac{r_K G_K}{r_M G_M} \right)} \frac{r_K}{r_M G_M} \right| = \frac{90}{\left( 1 + \frac{90 \cdot 2300}{35 \cdot 1200} \right) 35 \cdot 1200} = 3,6 \cdot 10^{-4}.$$

Вычислим предельную относительную ошибку

$$E = E_1 + E_2 + E_3 + E_4 = \\ = 0,0092 \cdot 0,1 + 0,0238 \cdot 0,1 + 6,9 \cdot 10^{-4} \cdot 1,5 + 3,6 \cdot 10^{-4} \cdot 1,5 = 0,0049.$$

Абсолютная погрешность косвенного измерения  $\Phi_m$  составит

$$\Delta_{\Phi_m} = E \cdot \Phi_m = 0,0049 \cdot 33 = 0,16 \, \%.$$

**Ответ:**  $\Phi_m = 33 \pm 0,16$ ,  $E = 0,49 \, \%$ .

### Домашнее задание

Для закрепления материала предлагается выполнить следующее задание: «Определить предельную абсолютную ошибку вычисления величины удельного линейного абразивного износа трубопроводов пневмотранспортных установок систем пылеприготовления и золошлакоудаления ТЭС».

Согласно [7] величина износа стенок трубопроводов вычисляется по формуле

$$\delta_{\text{уд.л}} = \frac{5,55 \cdot 10^{-7} K_{\Pi} U_m^2 k_{\text{SiO}_2}}{D^2 m^{0,4} k_{\text{изн}}}, \quad (1.63)$$

где  $K_{\Pi}$  — критерий аэродинамической легкости частиц при пневмотранспорте мелкодисперсных сыпучих материалов (абсолютная погрешность определения критерия —  $\Delta_{K_{\Pi}} = \pm 0,001$ );  $U_m$  — средняя по сечению скорость потока частиц материала (измеряется со случайной погрешностью  $\Delta_{\text{сл}} = \pm 0,021$ ; класс прибора 0,1; предельная шкала измерения — 25 м/с);  $k_{\text{SiO}_2}$  — коэффициент относительного содержания  $\text{SiO}_2$  в угольной пыли (точное число);  $D$  — внутренний диаметр трубопровода, м (измеряется со случайной погрешностью  $\Delta_{\text{сл}} = \pm 0,004$  штангенциркулем с нониусом);  $m = G_m/G_b$  — массовая расходная концентрация потока смеси материала и воздуха, кг<sub>м</sub>/кг<sub>в</sub> (измеряется с абсолютной погрешностью  $\Delta = \pm 0,0009$ );  $k_{\text{изн}}$  — коэффициент относительной износостойкости материала трубопровода (точное число).

Неизвестные инструментальные погрешности средств измерений взяты из табл. 1.6.

*Исходные данные:*  $K_{\Pi} = 0,05$  кг/м<sup>2</sup>;  $U_m = 20$  м/с;  $k_{\text{SiO}_2} = 0,0638$ ;  $D = 0,15$  м;  $m = 10$ ;  $k_{\text{изн}} = 1,92$ . Величину удельного износа  $\delta_{\text{уд.л}}$  определить из формулы (1.63).

## 1.6. Инженерный эксперимент

Инженерный эксперимент можно представить в виде некоторой классификации [8] (рис. 1.4).

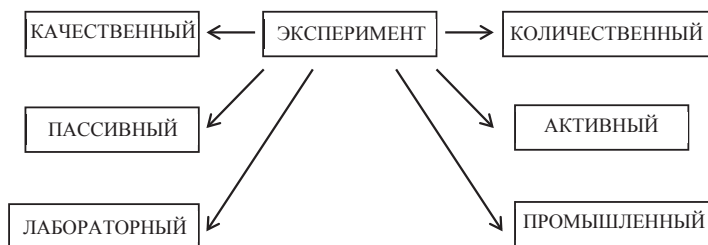


Рис. 1.4. Классификация инженерного эксперимента

Качественный эксперимент устанавливает факт существования каких-либо явлений, но количественных характеристик при этом не дается.

Количественный эксперимент позволяет устанавливать количественные взаимосвязи между факторами.

Лабораторный эксперимент обеспечивает большую достоверность опытов, более гибкое варьирование факторов.

Промышленный эксперимент требует по возможно меньшему числу измерений получить наиболее достоверные результаты.

**Эмпирический метод проведения эксперимента** проводится на основе изучения «черного ящика» (рис. 1.5) (если не известна теория процесса).

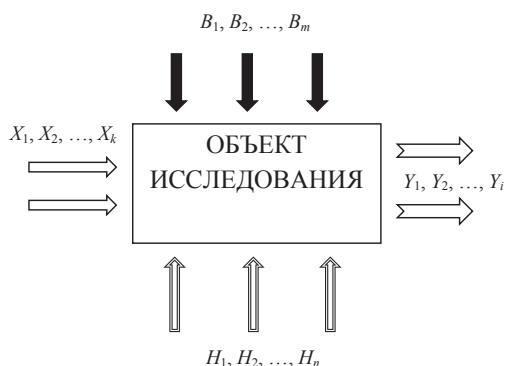


Рис. 1.5. «Черный ящик»:

$X$  — управляемые факторы;  $H$  — неуправляемые факторы;  $B$  — возмущающие факторы;  
 $Y$  — параметры



На первом этапе изучается реакция объекта на различные возмущения: управляемые и неуправляемые факторы, посторонние «шумы».

Результаты записываются в табличном виде, и после этого осуществляется статистическая обработка результатов и поиск наилучшей формы аппроксимации полученных данных. Строится математическое описание — модель процесса.

Единственным критерием применимости полученного математического описания является наибольшая простота уравнений при хорошей аппроксимации экспериментальных данных.

Достоинства:

- простота описания;
- доступность получения моделей;
- возможность построения модели при отсутствии теории процесса.

Недостатки:

- невозможность применения модели для режимов, в которых не проводились измерения;
- невозможность применения модели при переходе к другим установкам;
- невозможность экстраполяции результатов.

Рассмотрим пример (рис. 1.6).

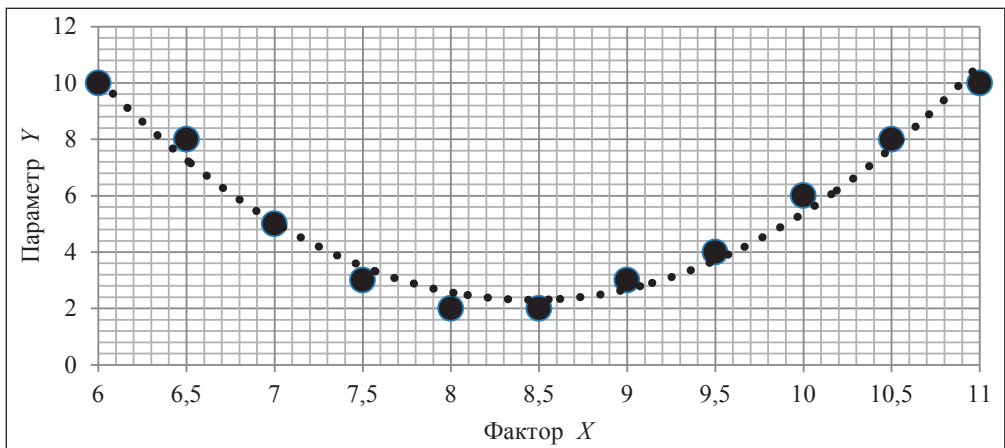


Рис. 1.6. Графическое описание модели в интервале значений  $X$  на узком отрезке

Модель строилась для значений в интервале  $[a = 6, b = 11]$ . Получена квадратичная зависимость, достаточно адекватно описывающая опытные точки.

Однако фактический процесс протекает совершенно по другой зависимости (рис. 1.7).

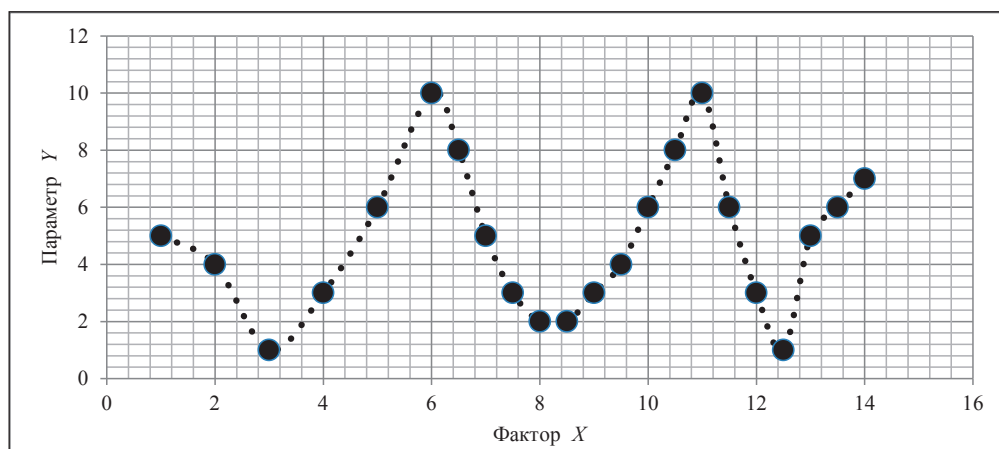


Рис. 1.7. Графическое описание реального процесса

И если в интервале  $[a, b]$  модель хорошо описывает процесс, протекающий в оригинале, то при выходе величины значения  $X$  за пределы отрезка  $[a, b]$  математическая модель совершенно не подходит для описания эксперимента.

Эмпирические методы полезны и применимы для изучения сложных систем, если их структура не изменяется во времени, теория процесса неизвестна и (или) когда необходимо быстро получить модель без исследования процесса.

**Экспериментально-аналитический метод** [8] заключается в составлении уравнений путем анализа явлений, происходящих в объекте, при этом численные значения коэффициентов полученных уравнений определяются экспериментально на реальном объекте. Являясь комбинацией аналитического и экспериментального способов определения свойств объектов, этот метод учитывает их преимущества и недостатки.

Используется декомпозиция сложного явления, т. е. на основе анализа определяются более простые, элементарные процессы, которые можно исследовать более доступными способами. После анализа влияния элементарных процессов на процесс в целом несущественные факторы отбрасываются и выбирается тот элементарный процесс, который оказывает наиболее существенное влияние. Затем составляется математическое описание, причем не в форме полинома, а в виде

зависимости, которая характерна для данного элементарного процесса. Влияние остальных элементарных процессов учитывается посредством изменения коэффициентов, входящих в эту зависимость.

В качестве примера рассмотрим построение модели для описания процесса переноса тепла в неподвижном зернистом слое в вертикальном направлении (рис. 1.8).

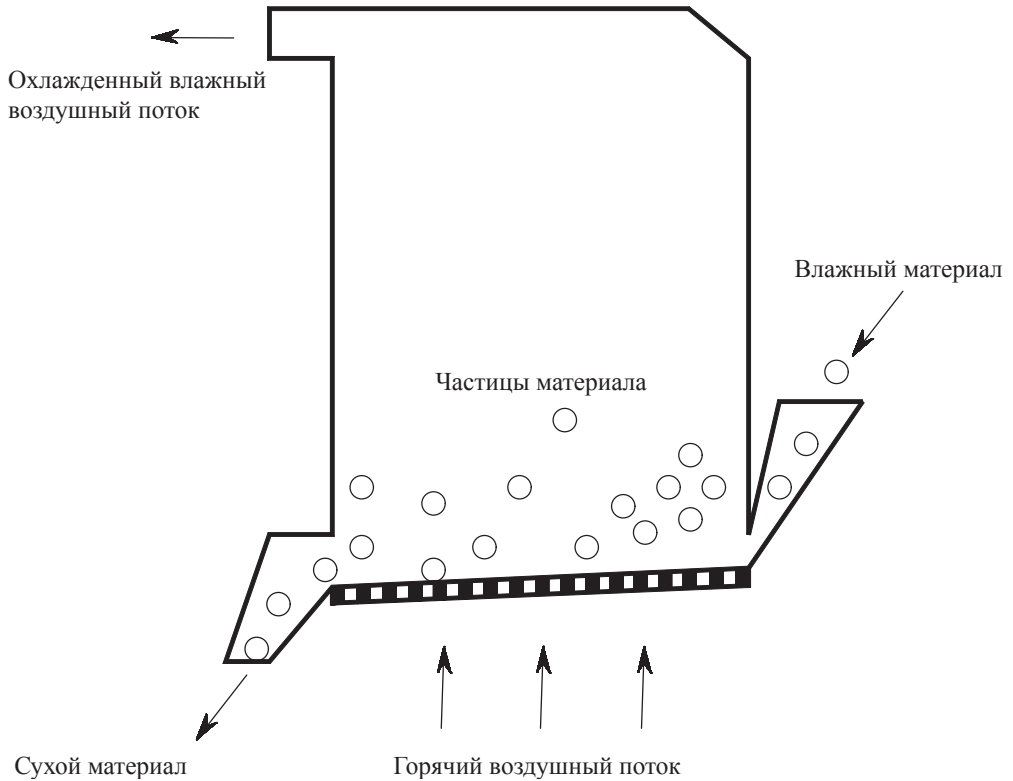


Рис. 1.8. Модель сушки «кипящего слоя»

Процесс переноса тепла осуществляется за счет следующих процессов: теплопроводности, теплового излучения и конвекции.

При температурах менее 800 градусов К и малых линейных скоростях потока газа перенос тепла в основном определяется теплопроводностью. Этот процесс описывается уравнением Фурье:  $q_t = \lambda \frac{dT}{dx}$ , где  $\lambda$  — коэффициент теплопроводности (Вт/(м·К)).

Однако пользоваться этим уравнением пока нельзя, т. к. в нем не учтены тепловое излучение и конвекция (остальные элементарные со-

ставляющие процесса переноса тепла). Для их учета вместо истинного значения вводится некоторое «эффективное» значение, которое определяется экспериментально, при этом уравнение примет вид

$$q_t = \lambda_{\text{эф}} \frac{dT}{dx}.$$

Уравнение является экспериментально-аналитической моделью процесса переноса тепла в неподвижном зернистом слое.

Совершенно очевидно, что  $\lambda_{\text{эф}}$  не является физической константой, а зависит от условий экспериментов, при которых она была получена, и от масштабов установки.

Достоинства: лучше описывает нелинейные свойства объекта моделирования, т. к. позволяет более надежно выбирать вид уравнения.

Недостатки: эффективные коэффициенты изменяются в зависимости от условия проведения опытов, поэтому экспериментально-аналитическая модель справедлива лишь в том интервале, в котором производился эксперимент.

Экспериментально-аналитический метод имеет преимущество перед чисто экспериментальным в том, что он отражает теорию процесса. Для учета влияния явлений, не учтенных при составлении модели, вводятся эффективные коэффициенты.

В первом методе эксперимент необходим для получения модели, во втором — для определения коэффициентов модели.

Аналитический метод применяют при проектировании новых технологических объектов, физико-химические процессы которых достаточно хорошо изучены. В математическое описание объекта входят представленные ниже составляющие (рис. 1.9).

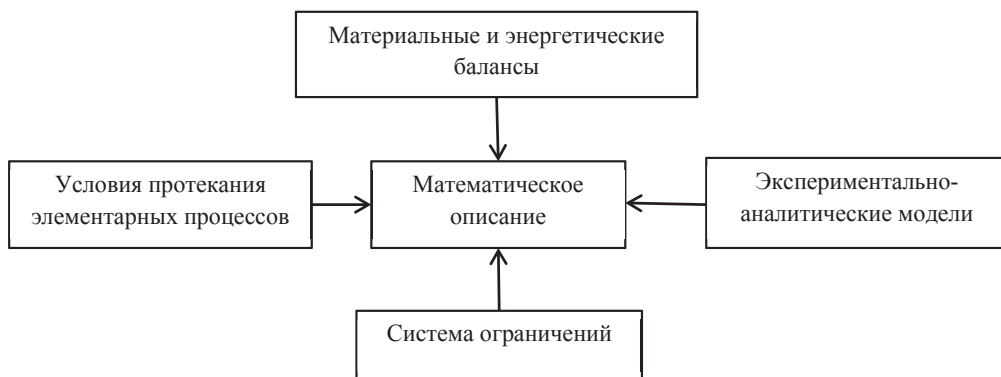


Рис. 1.9. Аналитический метод проведения эксперимента

Материальные и энергетические балансы составляются на основе закона сохранения энергии и массы.

Ограничения могут быть обусловлены технологическими, техническими или экономическими причинами.

*Достоинства:* возможность широкой экстраполяции, разделение сложного процесса на отдельные составляющие и исследование процесса по частям облегчают составление модели процесса в целом, возможность изучения процесса на разных уровнях.

*Недостатки:* трудность создания надежной теории сложных процессов, невозможность использования при неизвестном механизме процесса, большие затраты времени.

## **1.7. Численные методы решения инженерных задач**

---

### **1.7.1. Вычислительные алгоритмы**

*Алгоритм* — это конечный набор правил, позволяющих чисто механически решать любую конкретную задачу из некоторого класса однотипных задач [10,17]. При этом подразумевается:

- исходные данные могут изменяться в определенных пределах (*массовость алгоритма*);
- процесс применения правил к исходным данным (путь решения задачи) определен однозначно (*детерминированность алгоритма*);
- на каждом шаге процесса применения правил известно, что следует считать результатом этого процесса (*результативность алгоритма*).

В большинстве задач математическая модель выражается в виде формулы. Формула определяет последовательность математических операций, которые нужно выполнить для вычисления исходной величины. Однако известны задачи, для которых ответ легко может быть найден, хотя он не описывается в виде формулы (например, правило поразрядного сложения чисел столбиком).

Если модель описывает зависимость между исходными данными и искомыми величинами, то *алгоритм представляет собой последовательность действий, которые надо выполнить, чтобы от исходных данных перейти к искомым величинам.*

Удобной формой записи алгоритма является блок-схема. Она не только достаточно наглядно описывает алгоритм, но и представляет собой основу для составления программы. Каждый класс математических моделей имеет свой метод решения, который реализуется в алгоритме. Поэтому очень важной является классификация задач по виду математической модели. При таком подходе задачи, различные по содержанию, можно решать с помощью одного и того же алгоритма. Алгоритм записывают с помощью обычных математических символов. Для того чтобы он мог быть прочитан ЭВМ, необходимо составить программу. Программа — это описание алгоритма решения задачи, заданное на языке ЭВМ. Алгоритмы и программы объединяются понятием «математическое обеспечение».

Графическое изображение алгоритма широко используется перед программированием задачи вследствие его наглядности, т. к. зрительное восприятие обычно облегчает процесс написания программы, ее корректировки при возможных ошибках, осмысливание процесса обработки информации.

Рассмотрим пример алгоритма при вычислении числа  $\pi$ .

Если принять диаметром окружности  $d = 1$ , то число  $\pi$  можно определить при помощи вычисления периметров вписанного и описанного многоугольников

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (p_{\text{вп}}) = \lim_{n \rightarrow \infty} (p_{\text{оп}}) = \pi. \quad (1.64)$$

С ростом числа сторон периметры вписанных многоугольников растут, а описанных — убывают.

Архимед дошел в вычислениях до 96-угольника, получив оценку

$$3\frac{10}{71} \leq \pi \leq 3\frac{1}{7}.$$

В первой половине XV века придворный астроном хана Улукбека Аль-Каши вычислил  $\pi$  с 17 знаками после запятой. Он дошел до  $6 \cdot 2^{27}$ -угольника.

В настоящее время вычисление  $\pi$  с точностью до миллиона знаков с применением ЭВМ осуществляется за несколько минут. Данный пример показывает решение задачи бесконечного сходящегося процесса. Алгоритмы решения таких задач называют *вычислительными алгоритмами*, а основанные на них методы решения математических задач — *численными методами*.

Вычислительные (численные) методы применяются:

- для решения систем линейных уравнений;
- интерполирования и приближенного вычисления функций;
- численного интегрирования;
- численного решения систем нелинейных уравнений;
- численного решения обыкновенных дифференциальных уравнений;
- численного решения уравнений в частных производных (уравнений математической физики);
- решения задач оптимизации.

### 1.7.2. Нахождение корня непрерывной функции

Методы решения линейных и квадратных уравнений были известны еще древним грекам. Однако уравнения пятой и более степеней неразрешимы через коэффициенты с помощью арифметических действий и извлечения корней. Для примера рассмотрим алгоритм нахождения корней уравнений численными методами [11].

Пусть дана непрерывная функция  $f(x)$  и требуется найти корень уравнения  $f(x) = 0$ . Предположим, что найден отрезок  $[a, b]$ , такой, что  $f(a)f(b) < 0$ .

Теорема Больцано — Коши гласит: «Если функция  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$  и принимает на его концах значения разных знаков, то на этом отрезке существует, по крайней мере, один корень уравнения — внутри отрезка  $[a, b]$  существует точка  $\xi$ , в которой значение функции равно нулю».

**Метод «вилки»**, или **метод бисекций**, заключается в построении последовательно вложенных друг в друга отрезков, на концах которых функция принимает значения разных знаков. Каждый последующий отрезок получают делением пополам предыдущего (рис. 1.10).

Процесс построения последовательности отрезков позволяет найти нуль функции  $f(x)$  с любой заданной точностью. Опишем один шаг итераций.

Пусть на  $(n-1)$  шаге найден отрезок  $[a_{n-1}, b_{n-1}] \subset [a, b]$  такой, что

$$f(a_{n-1})f(b_{n-1}) < 0.$$

Делим его пополам точкой  $\xi = (a_{n-1} + b_{n-1})/2$  и вычисляем  $f(\xi)$ . Если  $f(\xi) = 0$ , то  $\xi$  — корень уравнения. Если  $f(\xi) \neq 0$ , то из двух половин отрезка выберем ту, на концах которой функция имеет противоположные знаки, так как один из корней лежит на этой половине.

Таким образом,

$$\begin{array}{lll} a_n = a_{n-1}, & b_n = \xi, & \text{если } f(\xi)f(a_{n-1}) < 0; \\ a_n = \xi, & b_n = b_{n-1}, & \text{если } f(\xi)f(a_{n-1}) > 0. \end{array}$$

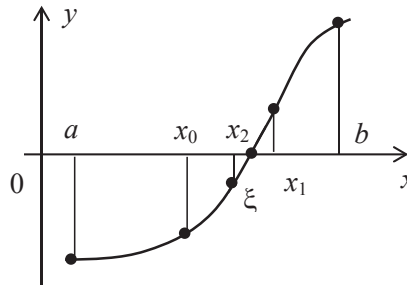


Рис. 1.10. Метод бисекций

На рис. 1.11 представлена блок-схема нахождения корня уравнения методом деления отрезка пополам.

Если требуется найти корень с точностью  $\varepsilon$ , то деление продолжается до тех пор, пока длина отрезка не станет меньше  $2\varepsilon$ . Координата середины отрезка и есть значение корня с требуемой точностью. Метод бисекций — простой и надежный метод для поиска простого корня уравнения  $f(x) = 0$ . Он сходится для любых непрерывных функций, в том числе не дифференцируемых. Скорость сходимости невелика. Для достижения точности  $\varepsilon$  необходимо совершить  $N$  итераций, где  $N \cong \log_2 \frac{b-a}{\varepsilon}$ . Если на отрезке  $[a, b]$  находится несколько корней уравнения,

то процесс нахождения корня сходится к одному из них.

**Метод простых итераций (последовательных приближений)** решения уравнения  $f(x) = 0$  состоит в замене исходного уравнения эквивалентным ему уравнением  $x = \varphi(x)$  и построении последовательности  $x_{(n+1)} = \varphi(x_n)$ , сходящейся при  $n \rightarrow \infty$  к точному решению.

Для сходимости метода необходимо применить следующую теорему.

**ТЕОРЕМА.** Пусть функция  $\varphi(x)$  определена и дифференцируема на  $[a, b]$ , причем все ее значения  $\varphi(x) \subset [a, b]$ . Тогда, если существует число  $q$  такое, что  $|\varphi'(x)| \leq q < 1$  на отрезке  $[a, b]$ , то последовательность



$x_{n+1} = \varphi(x_n)$  при  $n = 0, 1, 2, \dots$  сходится к единственному на  $[a, b]$  решению уравнения  $x = \varphi(x)$  при любом начальном значении  $x_0 \in [a, b]$ , т. е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(x_n) = \xi, \quad f(\xi) = 0, \quad \xi \in [a, b].$$

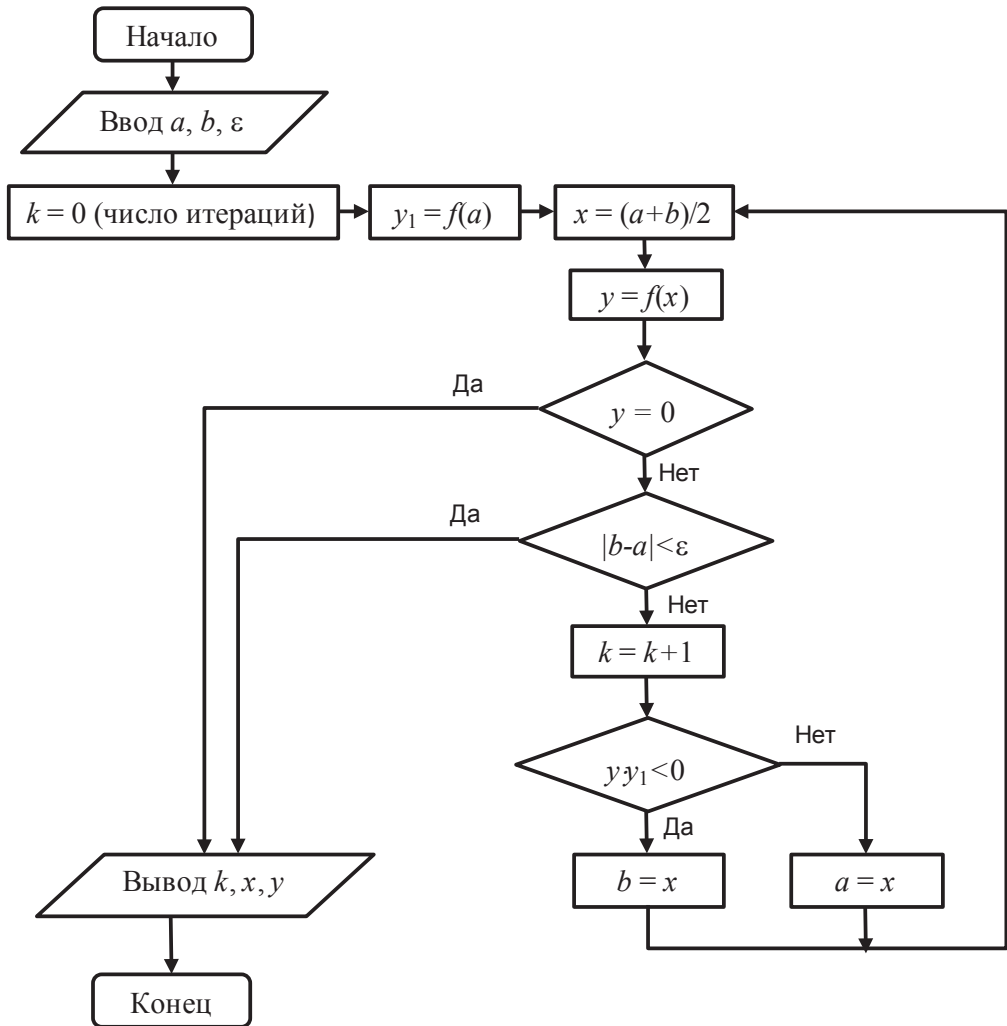


Рис. 1.11. Блок-схема алгоритма метода деления отрезка пополам

Метод простых итераций (последовательных приближений) решения уравнения  $f(x) = 0$  состоит в замене исходного уравнения эквивалентным ему уравнением  $x = \varphi(x)$  и построении последовательности  $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ , сходящейся при  $n \rightarrow \infty$  к точному решению.

Погрешность полученного результата зависит от знака производной  $\varphi'(x)$ . При  $\varphi'(x) > 0$  корень может быть найден с погрешностью  $\frac{q\varepsilon}{1-q}$ ;

если  $\varphi'(x) < 0$ , то погрешность не превышает  $\varepsilon$ .

Скорость сходимости зависит от абсолютной величины производной  $\varphi'(x)$ . Чем меньше  $|\varphi'(x)|$  вблизи корня, тем быстрее сходится процесс.

**Метод Ньютона (касательных)** состоит в построении итерационной последовательности  $x_{n+1} = x_n - f(x_n) \frac{1}{f'(x_n)}$ , сходящейся к корню уравнения  $f(x) = 0$ .

Условием сходимости является то, что  $f(x)$  определена и дважды дифференцируема на  $[a, b]$ , причем  $f(a)f(b) < 0$ , а производные  $f'(x), f''(x)$  сохраняют знак на отрезке  $[a, b]$ .

Если необходимо найти корень с точностью  $\varepsilon$ , то итерационный процесс можно прекращать, когда  $|x_n - x_{n+1}| \leq \varepsilon_0 = \sqrt{\frac{2m_1\varepsilon}{M_2}}$ ,

где  $m_1$  — наименьшее значение модуля первой производной  $|f'(x)|$  на  $[a, b]$ ;  $M_2$  — наибольшее значение модуля второй производной  $|f''(x)|$  на отрезке  $[a, b]$ .

### 1.7.3. Методы Рунге — Кутты

Методы Рунге — Кутты [16] — важное семейство численных алгоритмов решения обыкновенных дифференциальных уравнений и их систем. Данные итеративные методы явного и неявного приближенного вычисления были разработаны около 1900 года немецкими математиками К. Рунге и М. Куттой.

Формально, методом Рунге — Кутты является модифицированный и исправленный метод Эйлера, представляющий собой схему второго порядка точности. Наиболее часто используется и реализована в различных математических пакетах (*Maple, MathCAD, Maxima...*) стандартная схема точности четвертого порядка.

Метод Рунге — Кутты четвертого порядка столь широко распространен, что его часто называют просто методом Рунге — Кутты. Обычно применяется для решения задачи Коши.

Задача Коши — одна из основных задач теории дифференциальных уравнений (обыкновенных и с частными производными), состоит в нахождении решения (интеграла) дифференциального уравнения, удовлетворяющего начальным условиям (начальным данным). В теории дифференциальных уравнений, начальные и граничные условия — дополнение к основному дифференциальному уравнению, задающее его поведение в начальный момент времени или на границе рассматриваемой области соответственно.

Обычно дифференциальное уравнение имеет не одно решение, а целое их семейство. Начальные и граничные условия позволяют выбрать из него одно, соответствующее реальному физическому процессу или явлению.

Например, уравнение  $\frac{d^2 y}{dt^2} = -g$  описывает движение тела в поле земного тяготения. Ему удовлетворяет любая квадратичная функция вида

$$y(t) = -g \frac{t^2}{2} + at + b, \quad (1.65)$$

где  $a, b$  — произвольные числа. Для выделения конкретного закона движения необходимо указать начальную координату тела и его скорость, то есть начальные условия.

Рассмотрим задачу Коши.

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y); \quad y(x_0) = y_0.$$

Значение  $y$  при  $x_{n+1} = x_n + h$  обозначается  $y_{n+1}$  и вычисляется по итерационной формуле

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \quad (1.66)$$

где

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(x_n, y_n); \\ k_2 &= hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right); \\ k_3 &= hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}\right); \\ k_4 &= hf(x_n + h, y_n + k_3); \end{aligned}$$

$h$  — величина шага сетки по  $x$ .

Этот метод имеет четвертый порядок точности, то есть суммарная ошибка на конечном интервале интегрирования имеет порядок  $O(h^4)$ , ошибка на каждом шаге — порядка  $O(h^5)$ .

Метод позволяет решать системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка следующего вида:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t, x, y, \dots), \\ \frac{dy}{dt} = g(t, x, y, \dots), \\ \dots, \end{cases}$$

которые имеют решение

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ \dots, \end{cases}$$

где  $t$  — независимая переменная (например, время);  $x, y$  и т. д. — искомые функции (зависимые от  $t$  переменные).

Функции  $f, g$  и т. д. заданы. Также предполагаются заданными и начальные условия, т. е. значения искомых функций в начальный момент.

При заданном шаге  $h$  выполняются следующие операции:

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \\ y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4), \\ \dots, \end{cases}$$

где

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(t_n, x_n, y_n, \dots); \quad m_1 = hg(t_n, x_n, y_n, \dots); \\ k_2 &= hf\left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{k_1}{2}, y_n + \frac{m_1}{2}, \dots\right); \quad m_2 = hg\left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{k_1}{2}, y_n + \frac{m_1}{2}, \dots\right); \\ k_3 &= hf\left(t_n + h, x_n + k_2, y_n + \frac{m_2}{2}, \dots\right); \quad m_3 = hg\left(t_n + h, x_n + k_2, y_n + \frac{m_2}{2}, \dots\right); \\ k_4 &= hf(t + h, x_n + k_3, y_n + m_3, \dots); \quad m_4 = hg(t + h, x_n + k_3, y_n + m_3, \dots). \end{aligned}$$

При решении задач методом Рунге — Кутта широко применяются программы, в которых обязательно используется некоторый алгоритм автоматического изменения шага интегрирования.

При плавном виде функции применяется достаточно крупный шаг решения задачи. На участках с резкими изменениями поведения решения выбирается более мелкий шаг интегрирования.

Начальное значение шага задается пользователем. Далее шаг интегрирования меняется в соответствии с величиной, получаемой в ходе вычислений оценки погрешности.

## **1.8. Контрольные вопросы**

1. Что называется прямым измерением?
2. Что называется косвенным измерением?
3. Назовите три типа ошибок.
4. Какие измерения называются равноточными?
5. Что такое средняя ошибка отдельного измерения?
6. Назовите определение предельной относительной ошибки.
7. Чему равна абсолютная ошибка разности чисел?
8. Дайте определение алгоритма.

---

## ГЛАВА 2

### Методы решения инженерных задач

---

#### 2.1. Методика определения предельной относительной ошибки функции на примере математического маятника

---

**Ц**ель работы — на примере измерений периода колебаний маятника практически освоить методы обработки экспериментальных данных и вычисления прямых и косвенных ошибок измерений [9, 18, 21].

*Под математическим маятником понимают тело небольших размеров, подвешенное на тонкой нерастяжимой нити, масса которой пренебрежимо мала по сравнению с массой тела.*

В положении равновесия, когда маятник висит по отвесу, сила тяжести уравнивается силой натяжения нити. При отклонении маятника из положения равновесия на некоторый угол  $\varphi$  появляется касательная составляющая силы тяжести  $F_{\tau} = -mg \cdot \sin \varphi$  (рис. 2.1).

Если обозначить через  $x$  линейное смещение маятника от положения равновесия по дуге окружности радиуса  $l$ , то его угловое смещение будет равно  $\varphi = x/l$ . Второй закон Ньютона, записанный для проекций векторов ускорения и силы на направление касательной, дает  $ma_{\tau} = -mg \cdot \sin \frac{x}{l}$ .

В случае малых колебаний, когда приближенно  $\sin \frac{x}{l}$  можно заменить на  $\frac{x}{l}$ , математический маятник является гармоническим осциллятором, т. е. системой, способной совершать гармонические колебания. Практически такое приближение справедливо для углов порядка 15–20°; при этом величина не превышает 2 %.

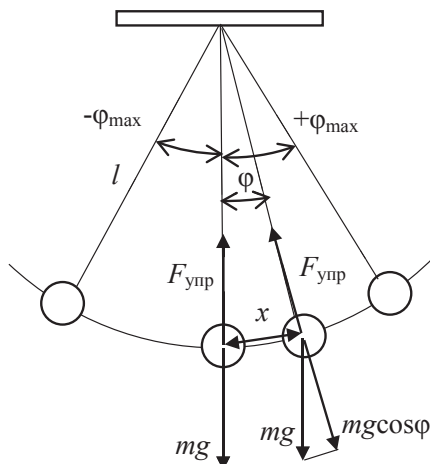


Рис. 2.1. Математический маятник:

$\varphi$  — угловое отклонение маятника от положения равновесия,  $x = l\varphi$  — смещение маятника по дуге

Колебания маятника при больших амплитудах не являются гармоническими.

Для малых колебаний математического маятника второй закон Ньютона записывается в виде  $ma_\tau = -mg \frac{x}{l}$ .

Таким образом, тангенциальное ускорение  $a_\tau$  маятника пропорционально его смещению  $x$ , взятому с обратным знаком. Это как раз то условие, при котором система является гармоническим осциллятором. По общему правилу для всех систем, способных совершать свободные гармонические колебания, модуль коэффициента пропорциональности между ускорением и смещением из положения равновесия равен квадрату круговой частоты

$$\omega_0^2 = \frac{g}{l}, \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

Эта формула выражает *собственную частоту малых колебаний математического маятника*. Следовательно,

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (2.1)$$

Для проверки адекватности модели можно провести натурный эксперимент замера периода колебаний и сравнить известное зна-

чение постоянной ускорения свободного падения с полученными данными:

$$g = l \left( \frac{2\pi}{T} \right)^2. \quad (2.2)$$

Для выполнения эксперимента понадобится:

1. Металлическая линейка с пределом измерений до 1000 мм, с допустимой инструментальной погрешностью 0,2 мм.

2. Электронный секундомер с ценой деления 0,01 с. Инструментальная погрешность секундомера мала и ее можно не учитывать при измерениях.

### 2.1.1. Выполнение измерений

Измерение проводится с различными периодами колебаний маятника (разной длиной нити).

#### Измерение 1 (Маятник № 1).

Примем длину нити маятника около 500 мм. Для выполнения работы нужно отклонить маятник на угол 15–20 градусов от положения равновесия (рис. 2.2), отпустить его и измерить секундомером время одного полного колебания. Указанные измерения провести 50 раз, данные занести в табличную форму. Вычисления производить в электронной таблице *Microsoft Office Excel*.

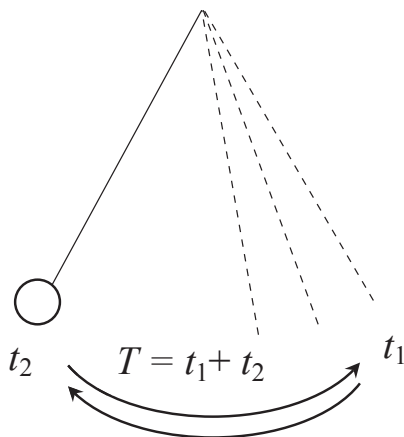


Рис. 2.2. Измерение периода колебаний маятника



**Результаты измерений**

Маятник № 1, $l = 500$ мм			
$i$	$t_i$ , с	$t_i - t_{\text{cp}}$	$(t_i - t_{\text{cp}})^2$
1	—	—	—
2	—	—	—
...	...	...	...
50	—	—	—
$n$	$t_{\text{cp}}$	—	$\Sigma$

**Измерение 2 (Маятник № 2).**

Уменьшить длину маятника до 450 мм. Провести измерения *один* раз.

**Измерение 3 (Маятник № 3).**

Примем длину нити маятника около 400 мм. Провести измерения *пять* раз, данные занести в табличную форму, аналогичную форме на с. предыдущим замерам.

**Измерение 4 (Маятник № 4).**

Уменьшить длину маятника до 350 мм. Провести измерения *пятнадцать* раз. Данные занести в табличную форму.

**2.1.2. Обработка результатов измерений**

Построим полигон распределения времени колебаний для маятника № 1. Для этого в таблице *Excel* скопируем столбец  $t_i$  и сделаем сортировку по-возрастанию. Определим границы полигона по наименьшему и наибольшему значению периода колебаний, округляя их с точностью до 0,5 с. Сформируем новый столбец с шагом 0,5 с и в соседние столбцы запишем середины интервалов и количество попаданий текущего периода колебаний в каждый интервал. Ниже приведен пример таких вычислений:

**Построение полигона распределения времени колебаний маятника**

Интервал, с	Середины интервалов, с	Число попаданий
1,20	1,225	0
1,25	1,275	3

Интервал, с	Середины интервалов, с	Число попаданий
1,30	1,325	12
1,35	1,375	14
1,40	1,425	13
1,45	1,475	7
1,50	1,525	2
1,55	1,575	0

В случае, когда  $t_i$  совпадает с границами интервалов, они распределяются поровну между собой. На основании полученных данных можно построить точечную ломаную диаграмму (рис. 2.3).

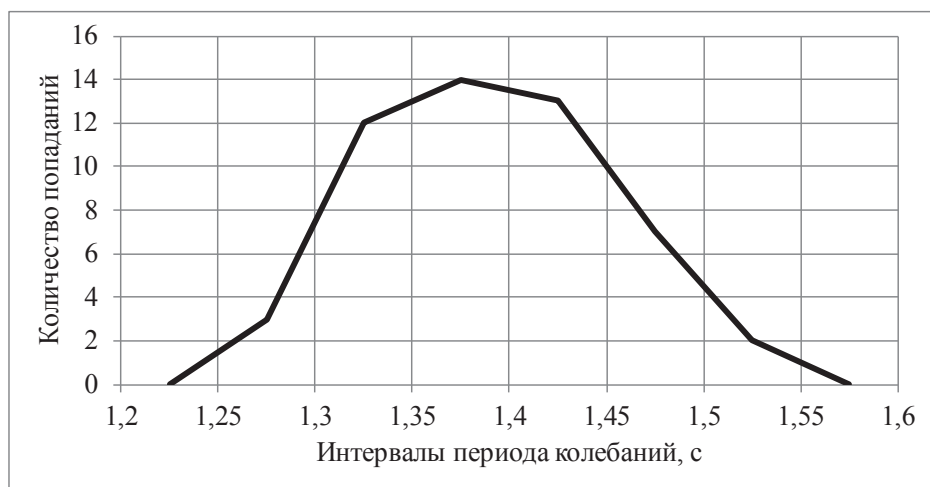


Рис. 2.3. Полигон распределения периодов колебаний маятника

Для определения средней квадратичной ошибки отдельного измерения  $S_n$  и средней среднеквадратичной ошибки  $S$  результатов 50 измерений маятника № 1 воспользуемся следующими зависимостями:

$$S_n = \pm \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (t_i - t_{\text{cp}})^2}{(n-1)}} = \pm \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{50} (t_i - t_{\text{cp}})^2}{(50-1)}}, \quad (2.3)$$

$$S = \pm \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (t_i - t_{\text{cp}})^2}{n(n-1)}} = \pm \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{50} (t_i - t_{\text{cp}})^2}{50(50-1)}}. \quad (2.4)$$

Абсолютная погрешность в определении периода колебаний равна  $\Delta t = \pm 3S$ , а предельные случайные ошибки измерений  $t_{\min} = -3S_n$ ;  $t_{\max} = +3S_n$  (99,7 % всех измерений должно попасть в этот промежуток).

Можно так же определить доверительную погрешность (полуширину доверительного интервала)  $\Delta t_{\text{сл}} = t_{\alpha, n} S$ , для доверительной вероятности  $P = 0,95$ . Значение критерия Стьюдента  $t_{\alpha, n}$  возьмем из табл. 1.2 (см. с. 16) (коэффициенты Стьюдента) (для  $n = 50$ ,  $t_{\alpha, n} = 2,011$ ).

В качестве примера приведены результаты вычислений.

**Результаты 50 вычислений периода колебаний маятника**

Маятник № 1, $l = 442$ мм			
$i$	$t_i$ , с	$t_i - t_{\text{cp}}$	$(t_i - t_{\text{cp}})^2$
1	1,29	-0,0524	0,0027
2	1,26	-0,0824	0,0068
3	1,4	0,0576	0,0033
4	1,26	-0,0824	0,0068
5	1,42	0,0776	0,0060
6	1,37	0,0276	0,0008
7	1,45	0,1076	0,0116
8	1,41	0,0676	0,0046
9	1,3	-0,0424	0,0018
10	1,29	-0,0524	0,0027
11	1,31	-0,0324	0,0010
12	1,37	0,0276	0,0008
13	1,29	-0,0524	0,0027
14	1,5	0,1576	0,0248
15	1,35	0,0076	0,0001
16	1,27	-0,0724	0,0052
17	1,42	0,0776	0,0060
18	1,42	0,0776	0,0060
19	1,23	-0,1124	0,0126
20	1,38	0,0376	0,0014
21	1,39	0,0476	0,0023
22	1,26	-0,0824	0,0068
23	1,3	-0,0424	0,0018
24	1,43	0,0876	0,0077
25	1,33	-0,0124	0,0002

Маятник № 1, $l = 442$ мм			
$i$	$t_i$ , с	$t_i - t_{cp}$	$(t_i - t_{cp})^2$
26	1,29	−0,0524	0,0027
27	1,34	−0,0024	0,0000
28	1,38	0,0376	0,0014
29	1,37	0,0276	0,0008
30	1,33	−0,0124	0,0002
31	1,37	0,0276	0,0008
32	1,21	−0,1324	0,0175
33	1,39	0,0476	0,0023
34	1,33	−0,0124	0,0002
35	1,39	0,0476	0,0023
36	1,35	0,0076	0,0001
37	1,35	0,0076	0,0001
38	1,34	−0,0024	0,0000
39	1,45	0,1076	0,0116
40	1,27	−0,0724	0,0052
41	1,32	−0,0224	0,0005
42	1,29	−0,0524	0,0027
43	1,42	0,0776	0,0060
44	1,28	−0,0624	0,0039
45	1,35	0,0076	0,0001
46	1,39	0,0476	0,0023
47	1,33	−0,0124	0,0002
48	1,3	−0,0424	0,0018
49	1,25	−0,0924	0,0085
50	1,33	−0,0124	0,0002
$t_{cp}$		$\Sigma (t_i - t_{cp})$	$\Sigma (t_i - t_{cp})^2$
1,342		0,00	0,1977
		$S =$	0,0090
		$S_n =$	0,0635
		$\Delta t = 3S =$	0,0269
		$3S_n =$	0,1906
		$t_{max} =$	1,5330
		$t_{min} =$	1,1518
		$\Delta t_{cl} =$	0,0181

Аналогично проведем вычисления для маятников № 3, № 4.

**Результаты 5 вычислений периода колебаний маятника**

Маятник № 3, $l = 342$ мм			
$i$	$t_i, \text{с}$	$t_i - t_{\text{cp}}$	$(t_i - t_{\text{cp}})^2$
1	1,19	0,0060	3,6E-05
2	1,24	0,0560	0,0031
3	1,22	0,0360	0,0013
4	1,13	−0,0540	0,0029
5	1,14	−0,0440	0,0019
	$t_{\text{cp}}$	$\Sigma (t_i - t_{\text{cp}})$	$\Sigma (t_i - t_{\text{cp}})^2$
	1,18	0,00	0,0093
		$S =$	0,0216
		$S_n =$	0,0483
		$\Delta t = 3S =$	0,0648
		$3S_n =$	0,1448
		$t_{\text{max}} =$	1,3288
		$t_{\text{min}} =$	1,0392
		$\Delta t_{\text{сл}} =$	0,0599

**Результаты 15 вычислений периода колебаний маятника**

Маятник № 3, $l = 293$ мм			
$i$	$t_i, \text{с}$	$t_i - t_{\text{cp}}$	$(t_i - t_{\text{cp}})^2$
1	1,1	0,0047	2,2E-05
2	1,17	0,0747	0,0056
3	1,01	−0,0853	0,0073
4	1,11	0,0147	0,0002
5	1,07	−0,0253	0,0006
6	1,06	−0,0353	0,0012
7	1,12	0,0247	0,0006
8	1,14	0,0447	0,0020
9	1,14	0,0447	0,0020
10	1,1	0,0047	0,0000
11	1,03	−0,0653	0,0043
12	1,19	0,0947	0,0090
13	1,01	−0,0853	0,0073
14	1,12	0,0247	0,0006
15	1,06	−0,0353	0,0012
—	$t_{\text{cp}}$	$\Sigma (t_i - t_{\text{cp}})$	$\Sigma (t_i - t_{\text{cp}})^2$
—	1,10	0,00	0,0420

Маятник № 3, $l=293$ мм			
$i$	$t_i$ , с	$t_i - t_{\text{cp}}$	$(t_i - t_{\text{cp}})^2$
		$S =$	0,0141
		$S_n =$	0,0548
		$\Delta t = 3S =$	0,0424
		$3S_n =$	0,1643
		$t_{\text{max}} =$	1,2596
		$t_{\text{min}} =$	0,9311
		$\Delta t_{\text{сл}} =$	0,0303

Для маятника № 2 можно взять среднеквадратичную ошибку  $S_n$  и значение  $t_{\alpha, n}$  из результатов для маятника № 1, так как эксперимент проводился в одинаковых условиях.

#### Результаты однократного вычисления периода колебаний маятника

Маятник № 2, $l=393$ мм			
$i$	$t_i$ , с	$t_i - t_{\text{cp}}$	$(t_i - t_{\text{cp}})^2$
1	1,17	—	—
		$S = S_n =$	0,0635
		$\Delta t = 3S =$	0,1906
		$3S_n =$	0,1906
		$t_{\text{max}} =$	1,3606
		$t_{\text{min}} =$	0,9794
		$\Delta t_{\text{сл}} =$	0,1277

Запишем результаты измерений всех маятников в виде  $t_{\text{cp}} \pm \Delta t_{\text{сл}}$  с учетом верных знаков в результатах измерений:

$$T_1 = 1,342 \pm 0,018;$$

$$T_2 = 1,17 \pm 0,13;$$

$$T_3 = 1,18 \pm 0,06;$$

$$T_4 = 1,10 \pm 0,03.$$

Наименьшая погрешность, как и ожидалось, у первого маятника, наибольшая — у второго.

### 2.1.3. Определение величины ускорения свободного падения

Так как при малых размерах шарика по сравнению с длиной нити и небольших отклонениях от положения равновесия период колебания определяется по формуле 2.1, ускорение свободного падения может быть вычислено как  $g = 4\pi^2 \frac{l}{T^2}$ .

Погрешность вычислений  $g$  складывается из инструментальной погрешности в определении длины маятника, инструментальной погрешности секундомера и случайной погрешности определения периода колебаний.

Инструментальную погрешность измерения длины нити можно определить как сумму погрешности прибора 0,2 мм и погрешности отсчетов, равной половине цены деления прибора 0,5 мм. Таким образом,  $\Delta l = \pm 0,7$  мм, или  $\Delta l = \pm 0,0007$  м.

Инструментальной погрешностью секундомера по условиям задачи пренебрегаем, но учитываем погрешность отсчета  $\Delta T_{\text{от}} = \pm 0,005$  с.

Общая погрешность определения периода колебаний выразится как  $\Delta T = \Delta T_{\text{от}} + \Delta t_{\text{сл}}$ .

Число  $\pi$  примем равным 3,142 с погрешностью  $\Delta \pi = 0,0005$ .

Так как наша вычисляемая функция представлена в виде  $y = \frac{Na^p b^q}{c^r}$ , предельная относительная ошибка вычисляется по зависимости

$$\delta = p \frac{\Delta a}{a} + q \frac{\Delta b}{b} + r \frac{\Delta c}{c}, \quad (2.5)$$

где  $N = 4$ ;  $a = \pi = 3,142$ ;  $\Delta a = \Delta \pi = 0,0005$ ;  $p = 2$ ;  $b = l$ ;  $\Delta b = 0,0007$ ;  $q = 1$ ;  $c = T$ ;  $\Delta c = \Delta T_{\text{от}} + \Delta t_{\text{сл}}$ ;  $r = 2$ .

После подстановки

$$\delta = 2 \frac{0,0005}{3,142} + \frac{0,0007}{l} + 2 \frac{\Delta T}{T}.$$

Зная относительную ошибку  $\delta$ , можно вычислить абсолютную погрешность вычисления значения ускорения свободного падения  $\Delta g = \delta g$ .

Полученные результаты расчетов для маятников № 1–4 представлены в табл. 2.1.

Таблица 2.1

**Результаты вычисления величины ускорения свободного падения**

Маятник №	$l$ , м	$\pm \Delta l$ , м	$T$ , с	$\pm \Delta T$ , с	$g$ , м/с <sup>2</sup>	$d$	$\pm \Delta g$ , м/с <sup>2</sup>
1	0,442	0,0007	1,342	0,023	9,6915	0,0362	0,3506
2	0,393	0,0007	1,17	0,135	11,3369	0,2329	2,6400
3	0,342	0,0007	1,18	0,065	9,6992	0,1125	1,0915
4	0,293	0,0007	1,10	0,035	9,5621	0,0663	0,6344

Видно, что действительная величина ускорения свободного падения  $g = 9,80665$  попадает в интервалы всех маятников, однако наименьшая погрешность — у первого.

## **2.2. Методика определения погрешностей вычисления коэффициентов уравнения регрессии для функции фракционного разделения сыпучих материалов**

### **2.2.1. Основы теории фракционирования сыпучих материалов**

Гравитационная классификация [12, 13] применяется во многих отраслях промышленности для получения сыпучих продуктов с определенным гранулометрическим составом. Любой стохастический процесс описывается функциями распределения. Для процесса фракционирования такой функцией является функция степени фракционного разделения.

На рис. 2.4 приведена кривая фракционного извлечения в мелкий продукт разделения.

Функция степени фракционного извлечения  $\Phi_m(x_i)$  в мелкий продукт разделения представляет собой долю частиц узкого класса крупности  $x_i$ , извлекаемую в мелкий продукт. Размер частиц, которые извлекаются поровну (со степенью 50 %) в оба продукта разделения, называется границей разделения  $x_{50}$ , или граничным зерном.

Чем круче кривая — тем более эффективен аппарат. Кривая фракционного разделения для идеального аппарата представляет собой единичную функцию. Так, все частицы размером мельче  $x_{50}$  должны извлекаться в мелкий продукт разделения на 100 %, крупнее — на 0 %. Реальные классификаторы имеют S-образные кривые.



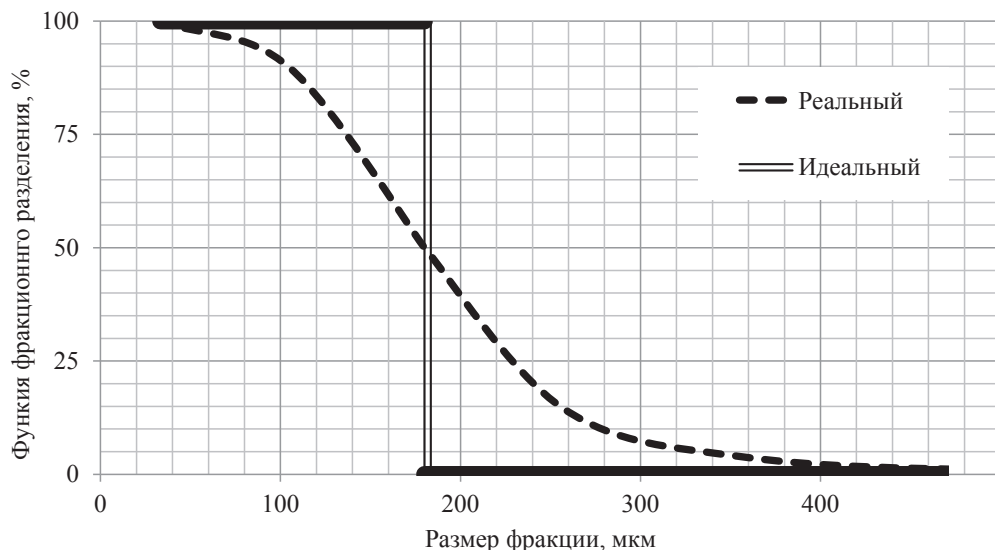


Рис. 2.4. Кривые фракционного разделения для реального и идеального классификатора

Один из наиболее применяемых критериев эффективности сепарации (степени приближения реальной кривой к единичной функции) — это показатель эффективности Эдера — Майера [13], %:

$$k_{75/25} = 100 \frac{x_{75}}{x_{25}}, \quad (2.6)$$

где  $x_{75}$  — размер частиц, которые извлекаются в мелкий продукт на 75 %;  $x_{25}$  — размер частиц, которые извлекаются в мелкий продукт на 25 %.

Чтобы экспериментально определить степень фракционного извлечения, нужно знать гранулометрический состав продуктов разделения — частные остатки мелкого продукта  $r_m(x_i)$  и частные остатки исходного материала  $r_n(x_i)$ , а также массовый выход крупного продукта  $\gamma_k$ :

$$\Phi_m(x_i) = \frac{\gamma_m}{100} \frac{r_m(x_i)}{r_n(x_i)}. \quad (2.7)$$

Существует много способов математического описания кривых фракционного разделения. Среди наиболее удачных аппроксимаций можно отметить функцию Плитта:

$$\Phi_{\text{м}}(x_i) = \frac{1}{1 + \left(\frac{x_i}{x_{50}}\right)^p}. \quad (2.8)$$

Параметр  $x_{50}$  представляет собой границу разделения, параметр  $p$  характеризует крутизну кривой и может служить мерой остроты сепарации [13].

Эффективность разделения по критерию Эдера — Майера выражается через этот параметр по зависимости

$$k_{75/25} = 100 \frac{x_{75}}{x_{25}} = 100 \left(\frac{1}{9}\right)^{\left(\frac{1}{p}\right)}. \quad (2.9)$$

Если известен гранулометрический состав исходного материала, то, зная функцию степени фракционного разделения можно рассчитать выходы продуктов разделения и их гранулометрические составы:

$$\gamma_{\text{к}} = \sum_{i=1}^n \Phi_{\text{к}}(x_i) r_{\text{и}}(x_i); \quad (2.10)$$

$$\gamma_{\text{м}} = \sum_{i=1}^n \Phi_{\text{м}}(x_i) r_{\text{и}}(x_i); \quad (2.11)$$

$$r_{\text{к}}(x_i) = 100 \frac{\Phi_{\text{к}}(x_i) r_{\text{и}}(x_i)}{\gamma_{\text{к}}}; \quad (2.12)$$

$$r_{\text{м}}(x_i) = 100 \frac{\Phi_{\text{м}}(x_i) r_{\text{и}}(x_i)}{\gamma_{\text{м}}}. \quad (2.13)$$

### 2.2.2. Методика проведения эксперимента

Для выполнения работы будем использовать: электронные аналитические весы СЕ1502-С (класс II по ГОСТ 24104–2001) с ценой деления 0,01 г; стандартную диафрагму с фланцевым отбором давления, выполненную по ГОСТ 8.563.1–97 (коэффициент диафрагмы  $C = 10 \pm 0,6$ ); дифференциальный U-образный манометр с ценой деления 1 мм вод. ст.; набор лабораторных сит по ГОСТ Р51568–99.

Лабораторные исследования процесса фракционирования сыпучего материала проведем на экспериментальной установке, состоя-

щей из пневматического сепаратора, системы улавливания материала и комплекса измерительной аппаратуры (рис. 2.5).

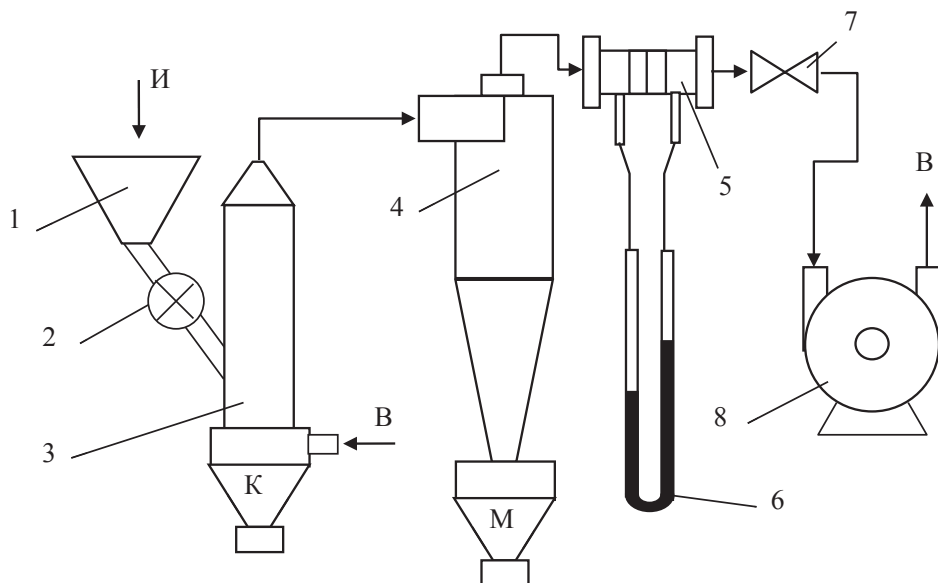


Рис. 2.5. Схема лабораторной установки:

- 1 — воронка, 2 — питатель, 3 — каскадный классификатор, 4 — пылеуловитель,  
5 — расходомер, 6 — прибор контроля, 7 — задвижка, 8 — воздуходувная машина.  
И — исходный материал; К — крупный продукт; М — мелкий продукт;  
В — воздушный поток

Экспериментальные исследования проводятся в следующей последовательности.

Включается водокольцевой насос 8 и посредством задвижки 7, расходомерной диафрагмы 5 и U-образного водяного манометра 6 устанавливается необходимый перепад давления на манометре ( $\Delta h$ ).

Расход воздуха через аппарат определяется с достаточной точностью по формуле,  $\text{м}^3/\text{ч}$ :

$$V = C\sqrt{\Delta h}, \quad (2.14)$$

где  $C$  — коэффициент диафрагмы.

В приемную воронку 1 загружается взвешенная порция исходного материала  $G$  и включается питатель 2. Одновременно с пуском питателя запускается секундомер и начинается отсчет времени  $\Delta t$  процесса фракционирования сыпучего материала в пневматическом сепараторе 3.

Мелкие частицы сыпучего порошка выносятся воздушным потоком через верхний патрубок сепаратора в циклон 4 и осаждаются в его бункере, крупные частицы осаждаются в бункере под сепаратором.

Процесс продолжается до полной выработки исходного продукта из бункера 1. Затем дается выдержка по времени около одной-двух минут для завершения процесса сепарации материалов.

Задвижкой 7 перекрывается подача воздуха в установку и выключается водокольцевой насос 8.

Производительность классификатора (расход исходного материала) вычисляется как

$$Q = \frac{G}{\Delta\tau} 3600, \text{ кг/ч.} \quad (2.15)$$

Из бункеров сепаратора и циклона выгружается крупный  $G_k$  и мелкий  $G_m$  — продукты пневматической классификации и взвешиваются с точностью до 1 г.

Определяются выходы продуктов разделения, %:

$$\gamma_m = 100 \frac{G_m}{G_m + G_k}, \quad (2.16)$$

$$\gamma_k = 100 \frac{G_k}{G_m + G_k} \quad (2.17)$$

и расходная концентрация материала, кг/м<sup>3</sup>:

$$\mu = \frac{Q}{V}. \quad (2.18)$$

Производится вычисление средней скорости потока в аппарате и в отверстиях решетки, м/с:

$$w = \frac{V}{3600 S_{\text{корп}}}; \quad (2.19)$$

$$w_p = \frac{V}{3600 S_{\text{реш}}}, \quad (2.20)$$

где  $S_{\text{корп}}$ ;  $S_{\text{реш}}$  — площади сечения аппарата и решетки.

Данные эксперимента и результаты вычислений записываются в табл. 2.2.

Таблица 2.2

## Пример записи результатов эксперимента

Результаты эксперимента*			
Показатели	Значение	Опыт № 1	Значение
Площадь сечения корпуса, м, $S_{\text{корп}} =$	0,036	Истинная плотность материала, кг/м <sup>3</sup> , $\rho =$	2800
Площадь сечения решетки, м, $S_{\text{реш}} =$	0,00085	Перепад давления, мм.вод.ст., $\Delta h =$	50
Диаметр отверстий решетки, мм, $d_{\text{реш}} =$	2	Расход воздуха, м <sup>3</sup> /ч, $V =$	70,71
Коэффициент диафрагмы, $C =$	10	Время опыта, с, $\Delta \tau =$	70
Масса исходного материала, кг, $G =$	1,53	Расход исходного материала, кг/ч, $Q =$	78,69
Масса исходного материала, кг, $G_{\text{к}} =$	7,428	Расходная концентрация, кг/м <sup>3</sup> , $\mu =$	1,11
Масса исходного материала, кг, $G_{\text{м}} =$	2,572	Выход крупного, %, $\gamma_{\text{к}} =$	74,28
Средняя скорость потока в аппарате, м/с, $w =$	0,55	Выход мелкого %, $\gamma_{\text{м}} =$	25,72
		Средняя скорость потока в отверстиях решетки, м/с, $w_{\text{р}} =$	23,11

\* Аппарат — многорядный; материал — купершлак.

Зерновой анализ проб проводится путем механизированного просеивания на наборе лабораторных сит. Для этого из каждого продукта берется навеска 100 г, помещается в ситовой набор и просеивается в течение 10 минут. Данные рассева заносятся в табл. 2.3.

Во второй колонке таблицы вычисляется размер фракции — среднеарифметическое значение размеров смежных сит, мкм:

$$x_i = \frac{d_{i+1} + d_i}{2}. \quad (2.21)$$

Исключением является размер фракции между нижним ситом и дном — составляющий  $x_0 = \frac{2}{3}(d_{i+1} + 0)$ , мкм. Нумерация сит начинается с верхнего.

В третью и четвертую колонку записывается суммарный вес продуктов классификации.

Таблица 2.3

## Результаты отсева и математической обработки экспериментальных данных

Размер сит, мм	Размер фракции $x$ , мм	Вес крупного, г	Вес мелкого, г	Гранулометрический состав, %						Функция $\Phi_m$ , %		$(\Phi_m - \Phi_m^p)^2$
				$R_k$	$r_k$	$R_m$	$r_m$	$R_{исх}$	$r_{исх}$	Эксперимент	Расчетная	
2500	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
2000	2250	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0
1600	1800	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0
1000	1300	10,7	0,0	10,7	10,7	0,0	0,0	8,0	8,0	0,0	0,01	0
630	815	28,2	0,0	28,2	17,5	0,0	0,0	21,0	13,0	0,0	0,1	0,01
400	515	53,9	0,4	53,9	25,7	0,4	0,4	40,2	19,2	0,5	0,8	0,06
315	357,5	69,0	2,9	69,0	15,1	2,9	2,5	52,0	11,8	5,5	3,8	2,87
200	257,5	89,9	12,4	89,9	20,9	12,4	9,4	70,0	17,9	13,5	14,4	0,78
160	180	96,8	35,6	96,8	6,9	35,6	23,3	81,1	11,1	53,8	44,9	77,91
50	105	99,9	94,5	99,9	3,1	94,5	58,9	98,5	17,5	86,8	89,8	8,97
0	33	100	100	100	0,1	100	5,5	100	1,5	95,0	99,9	24,61
—	—	—	—	$\gamma_k =$	0,74	$\gamma_m =$	0,26	—	—	—	—	115,21

Так как общий вес просеянного продукта может отличаться от 100 г, вычисляются полные проходы продуктов сепарации

$$R_{ki} = g_{ki} \frac{100}{g_{k0}}; \quad R_{mi} = g_{mi} \frac{100}{g_{m0}}, \quad (2.22)$$

где  $g_{ki}$ ;  $g_{mi}$  — суммарный вес порошка на  $i$ -м сите;  $g_{k0}$ ;  $g_{m0}$  — суммарный вес порошка на днище ситового набора.

Частные остатки на ситах вычисляются следующим образом — частный остаток на верхнем сите равен его полному остатку, остальные вычисляются по формуле

$$r_i = R_i - R_{i+1}. \quad (2.23)$$

Зная выходы крупного  $\gamma_k$  и мелкого  $\gamma_m$  (формулы 2.16, 2.17), вычисляются частные остатки исходного материала

$$r_{исxi} = r_{ki} \gamma_k + r_{mi} \gamma_m, \quad (2.24)$$

а затем и полные остатки

$$R_{исxi} = r_i + R_{i+1}. \quad (2.25)$$

Экспериментальные значения функции фракционного извлечения в мелкий продукт вычисляется как

$$\Phi_{Mi}^{\vartheta} = \frac{r_{Mi}\gamma_M}{r_{Mi}\gamma_M + r_{Ki}\gamma_K} = \frac{r_{Mi}\gamma_M}{r_{исxi}}. \quad (2.26)$$

### 2.2.3. Регрессионный анализ по методу наименьших квадратов

Для вычисления  $\Phi_{Mi}^p$  по формуле Плитта (2.8) нужно знать параметры  $x_{50}$  и  $p$ . Для этого приведем формулу Плитта к линейному виду

$$\frac{1}{\Phi_M(x)} = 1 + \left( \frac{x}{x_{50}} \right)^p \Rightarrow \frac{1}{\Phi_M(x)} - 1 = \left( \frac{x}{x_{50}} \right)^p, \quad (2.27)$$

прологарифмировав, получим

$$\ln \left( \frac{1}{\Phi_M(x)} - 1 \right) = \ln \left( \frac{x}{x_{50}} \right)^p \Rightarrow \ln \left( \frac{1}{\Phi_M(x)} - 1 \right) = p \ln x - p \ln x_{50}. \quad (2.28)$$

Введем новые переменные и константы  $y$ ,  $z$ ,  $a$  и запишем уравнение  $y = a + pz$ , где

$$y = \ln \left( \frac{1}{\Phi_M(x)} - 1 \right); \quad (2.29)$$

соответственно

$$\Phi_M(x) = \frac{1}{e^y + 1}; \quad (2.30)$$

$$a = -p \ln x_{50}; \quad (2.31)$$

$$x_{50} = \exp \left( -\frac{a}{p} \right); \quad (2.32)$$

$$z = \ln x; \quad (2.33)$$

$$x = e^z. \quad (2.34)$$

Результаты расчетов запишем в табл. 2.4.

Таблица 2.4

## Обработка результатов по методу наименьших квадратов

$n$	$x$ , мкм	$z$	$\Phi_m$	$y$	$z - z_{cp}$	$(z - z_{cp})^2$	$(z - z_{cp})y$	$y - pz - a$	$(y - pz - a)^2$
1	515	6,24	0,01	5,21	0,74	0,55	3,85	0,37	0,14
2	357,5	5,88	0,06	2,844	0,37	0,14	1,07	-0,38	0,15
3	257,5	5,55	0,14	1,85	0,05	0,00	0,09	0,07	0,01
4	180	5,19	0,54	-0,15	-0,31	0,10	0,05	-0,35	0,13
5	105	4,65	0,87	-1,88	-0,85	0,72	1,60	0,29	0,08
$\Sigma$	1415	27,52	1,60	7,87	0,00	1,51	6,65	0,00	0,50
$\Sigma/n$	283	5,50	0,32	1,57	0,00	0,30	1,33	0,00	0,10

Существует несколько правил составления табл. 2.4.

1. Значения функции  $\Phi_m$ , полученные из эксперимента, подставляются в долях единицы;

2. Так как в формуле (2.29) (см. с. 72) имеется деление на  $\Phi_m$ , оно не должно быть нулевым. Поэтому для расчетов берутся только ненулевые значения функции;

3. Из опыта аппроксимации функции фракционного разделения зависимостью Плитта установлено, что она дает большую погрешность в расчетах последней фракции (между нижним ситом и дном), поэтому это значение функции в таблицу также не заносится.

После заполнения табл. 2.4 по формулам (1.55), (1.56) вычисляются коэффициенты уравнения регрессии

$$p = \frac{\sum ((z_i - z_{cp})y)}{\sum (z_i - z_{cp})^2}; \quad (2.35)$$

$$a = -p \ln x_{50} = y_{cp} - px_{cp}. \quad (2.36)$$

По (2.32) находим значение границы разделения и, решая уравнение (2.8), заносим в табл. 2.3 расчетные значения  $\Phi_m$ . Общая квадратичная ошибка аппроксимации определится как

$$\Delta^2 = \sum_{i=1}^n (\Phi_{mi}^{\text{э}} - \Phi_{mi}^{\text{р}})^2. \quad (2.37)$$

Для наглядности построим график зависимости функции фракционного извлечения в мелкий продукт от размера фракций (рис. 2.6) в виде точечной диаграммы. Экспериментальные значения функции представлены в виде точек, расчетные — в виде плавной кривой.



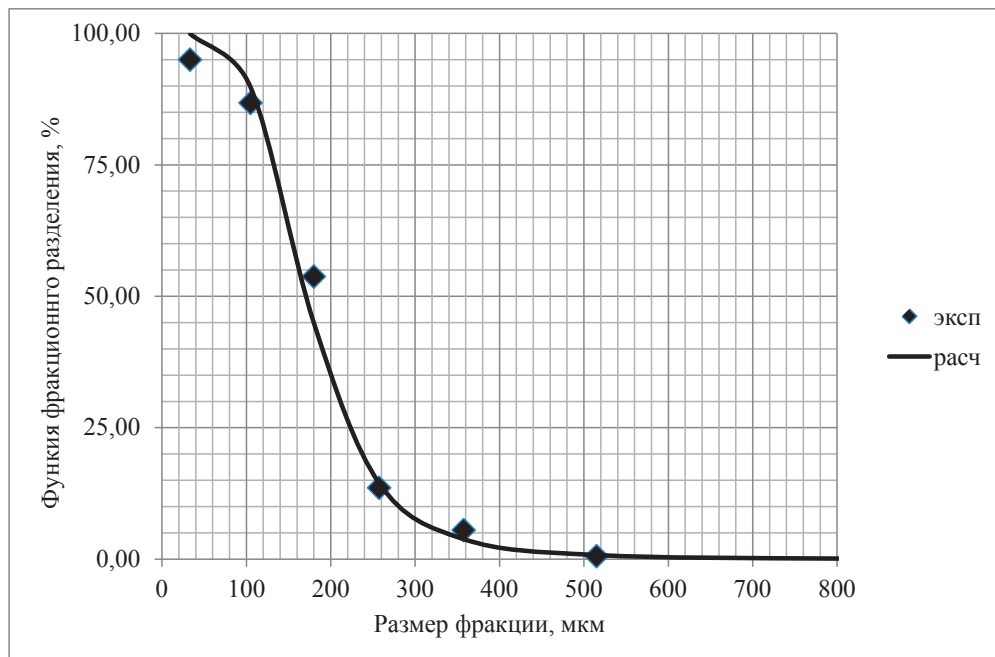


Рис. 2.6. Функция фракционного разделения

Определим ошибку в вычислении  $x_{50}$ .

Среднеквадратичные ошибки определения  $a$  и  $p$  согласно (1.61), (1.62) определяются как

$$S_p = \sqrt{\frac{\sum (y_i - pz_i - a)^2}{(n-2) \sum (z_i - z_{\text{ср}})^2}}; \quad (2.38, a)$$

$$S_a = \sqrt{\left( \frac{\sum (y_i - pz_i - a)^2}{(n-2)} \right) \left( \frac{1}{n} + \frac{z_{\text{ср}}^2}{\sum (z_i - z_{\text{ср}})^2} \right)}. \quad (2.38, б)$$

Так как  $x_{50} = \exp\left(-\frac{a}{p}\right)$ , то по формуле (1.43) имеем

$$S_{x_{50}} = \pm \sqrt{\left[ \frac{\partial}{\partial(a)} \left( \exp\left(-\frac{a}{p}\right) \right) \right]^2 S_a^2 + \left[ \frac{\partial}{\partial(p)} \left( \exp\left(-\frac{a}{p}\right) \right) \right]^2 S_p^2}. \quad (2.39)$$

После дифференцирования

$$S_{x_{50}} = \pm \sqrt{\left[ \exp\left(-\frac{p}{a}\right)\left(-\frac{1}{p}\right) \right]^2 S_a^2 + \left[ \exp\left(-\frac{p}{a}\right)\left(\frac{a}{p^2}\right) \right]^2 S_p^2}. \quad (2.40)$$

Задавшись надежностью  $P = 0,95$ , по таблице коэффициентов Стьюдента для  $n$ -точек, находим  $t_{\alpha, P}$  (для пяти точек  $t_{\alpha, P} = 2,776$ ) и определяем абсолютную ошибку  $\Delta x_{50}$ . Определяем относительную ошибку вычисления границы разделения  $\delta = \frac{\Delta x_{50}}{x_{50}} 100\%$ .

Окончательные результаты вычислений приведены ниже.

#### Результаты вычислений

$p$	$S_p$	$a$	$S_a$	$x_{50}$ , МКМ	$S_{x_{50}}$	$k_{75/25}$ , %
4,40	0,33	-22,67	1,84	171,85	0,69	60,72

$$p = 4,40 \pm 0,93; \delta = 21,0\%.$$

$$k_{75/25} = 60,72 \pm 6,37; \delta = 10,5\%.$$

$$x_{50} = 171,85 \pm 1,92; \delta = 1,1\%.$$

Таким образом, метод наименьших квадратов позволяет описывать экспериментальные данные кривой фракционного разделения функцией Плитта с относительной погрешностью определения граничного зерна в пределах 1 %.

## 2.3. Применение метода наименьших квадратов для аналитического описания дисперсного состава измельченных материалов

### 2.3.1. Основы теории

Во всех технологических операциях, связанных с измельчением и фракционированием сыпучих материалов, обязательным методом контроля является дисперсный анализ.

Дисперсность или степень измельчения материала, характеризуется процентным содержанием частиц определенного размера в общей массе порошка.

Для описания свойств измельченных материалов применяется функция распределения  $D(x)$  массы материала по диаметрам частиц. Функция  $D(x)$  — функция распределения, равная выраженному в процентах отношению массы всех частиц, диаметр которых меньше  $x$ , к общей массе полидисперсного материала.

Связанная с ней функция  $R(x)$  — функция распределения, равная выраженному в процентах отношению массы всех частиц, диаметр которых больше  $x$ , к общей массе полидисперсного материала, %:

$$D(x) + R(x) = 100. \quad (2.41)$$

Кумулятивные кривые распределения  $D$  и  $R$  получаются путем последовательного суммирования накопленных процентных содержаний частиц разных размеров. Их можно описать различными формулами, самыми известными из которых являются [13]:

- формула Годэна — Андреева:

$$D(x) = 0,8 \left( \frac{x}{B} \right)^A; \quad (2.42)$$

- формула Плитта:

$$D(x) = 1 - \frac{1}{1 + \left( \frac{x}{B} \right)^A}. \quad (2.43)$$

Можно привести еще много подобных функций, например:

$$D(x) = 1 - \exp \left( - \left( \frac{x}{B} \right)^A \right); \quad (2.44)$$

$$D(x) = Ax + \arctg(Bx); \quad (2.45)$$

$$D(x) = A \sqrt{\ln(Bx + 1)}. \quad (2.46)$$

Здесь  $A$  и  $B$  — экспериментальные коэффициенты.

### 2.3.2. Методика расчета

Пусть задан, например исходный состав порошкообразного горн-блендита в виде полных весовых остатков на ситах:

**Исходный гранулометрический состав**

Сита, мкм	630	400	315	200	160	125	50	0
$R$ , гр	0,16	0,66	2,31	14,03	23,12	32,49	67,90	99,90

Так как фракционный состав исходного материала представлен в виде полных остатков  $R(x_i)$  (общая сумма — 100 %), необходимо рассчитать частные остатки  $r(x_i)$  как

$$r(x_i) = R(x_{i+1}) - R(x_i) \quad (2.47)$$

и вычислить полные проходы, в долях единиц.

$$D(x_i) = \frac{100 - R(x_i)}{100}. \quad (2.48)$$

В электронной таблице появится следующая форма:

**Исходный состав горнблендита**

Сита, мкм	$R$	$r$	$D$
630	0,16	0,16	1,00
400	0,66	0,50	0,99
315	2,31	1,65	0,98
200	14,03	11,72	0,86
160	23,12	9,09	0,77
125	32,49	9,37	0,68
50	67,90	35,41	0,32
0	99,90	32,00	0,00

Для построения аппроксимационной зависимости воспользуемся методом наименьших квадратов, для чего запишем модель линейной регрессии в виде

$$Y(\delta_i) = A_0 + A_1 \delta_i. \quad (2.49)$$

Коэффициенты уравнения регрессии

$$A_0 = \frac{\sum_{i=1}^n Y(\delta_i) \sum_{i=1}^n \delta_i^2 - \sum_{i=1}^n \delta_i \sum_{i=1}^n (Y(\delta_i) \delta_i)}{n \sum_{i=1}^n \delta_i^2 - \left( \sum_{i=1}^n \delta_i \right)^2}; \quad (2.50)$$

$$A_1 = \frac{n \sum_{i=1}^n (Y(\delta_i) \delta_i) - \sum_{i=1}^n \delta_i \sum_{i=1}^n Y(\delta_i)}{n \sum_{i=1}^n \delta_i^2 - \left( \sum_{i=1}^n \delta_i \right)^2}, \quad (2.51)$$

где  $n$  — количество сит (фракций).

Необходимо представить аппроксимационные функции в виде линейных уравнений.

Например, интегральную формулу Годэна — Андреева (2.42) можно привести к линейному виду путем логарифмирования

$$\ln(D(x_i)) = A(\ln 0,8 - \ln B) + A \ln x_i.$$

Производя замену переменных, получаем

$$Y(x_i) = \ln(D(x_i));$$

$$A_0 = A(\ln 0,8 - \ln B),$$

соответственно

$$B = \exp\left(\ln 0,8 - \frac{A_0}{A}\right);$$

$$A_1 = A;$$

$$\delta_i = \ln x_i.$$

В электронной таблице это будет выглядеть таким образом (рис. 2.7):

В табличном редакторе *Excel* имеется встроенная процедура — *поиск решения*. Для этого нужно дополнить таблицу еще двумя столбцами (рис. 2.8).

При этом столбец  $D_{п.р}$  рассчитывается по формуле (2.42), а в качестве коэффициентов  $A$  и  $B$  применяются коэффициенты  $A_{п.р}$  и  $B_{п.р}$ .

Аппроксимация Годена – Андреева

Сита, мкм	$D$	$\delta$	$\delta^2$	$Y$	$Y\delta$	$D_p$	$\Delta^2$
630	1,00	6,446	41,547	-0,0030	-0,0194	3,9862	8,9352
400	0,99	5,991	35,898	-0,0066	-0,0397	2,0188	1,0514
315	0,98	5,753	33,092	-0,0234	-0,1344	1,4116	0,1889
200	0,86	5,298	28,072	-0,1512	-0,8010	0,7149	0,0210
160	0,77	5,075	25,757	-0,2629	-1,3344	0,5118	0,0661
125	0,68	4,828	23,313	-0,3929	-1,8970	0,3536	0,1034
50	0,32	3,912	15,304	-1,1363	-4,4453	0,0896	0,0535
1	0,00	0,000	0,000	-9,2103	0,0000	0,0003	0,0000
$\Sigma=$		37,304	202,983	-11,1866	-8,6711		10,4194
$A_0=$		-8,38	$A=$	1,50			
$A_1=$		1,50	$B=$	215,60			

Рис. 2.7. Скриншот решения уравнения регрессии

Аппроксимация Годена – Андреева

Сита, мкм	$D$	$\delta$	$\delta^2$	$Y$	$Y\delta$	$D_p$	$\Delta^2$	$D_{п.р}$	$\Delta_{п.р}^2$
630	1,00	6,446	41,547	-0,0030	-0,0194	3,9862	8,9352	1,1416	0,0209
400	0,99	5,991	35,898	-0,0066	-0,0397	2,0188	1,0514	0,9710	0,0005
315	0,98	5,753	33,092	-0,0234	-0,1344	1,4116	0,1889	0,8917	0,0073
200	0,86	5,298	28,072	-0,1512	-0,8010	0,7149	0,0210	0,7585	0,0102
160	0,77	5,075	25,757	-0,2629	-1,3344	0,5118	0,0661	0,7005	0,0047
125	0,68	4,828	23,313	-0,3929	-1,8970	0,3536	0,1034	0,6415	0,0011
50	0,32	3,912	15,304	-1,1363	-4,4453	0,0896	0,0535	0,4628	0,0201
1	0,00	0,000	0,000	-9,2103	0,0000	0,0003	0,0000	0,1148	0,0132
$\Sigma=$		37,304	202,983	-11,1866	-8,6711		10,4194	—	0,0780
$A_0=$		-8,38	$A=$	1,50				$A_{п.р}=$	0,3564
$A_1=$		1,50	$B=$	215,60				$B_{п.р}=$	#####

Рис. 2.8. Скриншот решения уравнения регрессии с процедурой «Поиск решения»

Решение заключается в поиске наименьшего значения суммы квадратов отклонений экспериментальных и расчетных значений функции  $\Delta_{п.р}^2 = (D_{п.р} - D)^2$  при изменении ячеек с коэффициентами  $A_{п.р}$ ;  $B_{п.р}$ .

Графическое представление расчетов показано на графиках (рис. 2.9).

Значительное отличие значений квадратов отклонений по методу наименьших квадратов и автоматизированным поиском решения можно объяснить нелинейностью аппроксимационной функции.

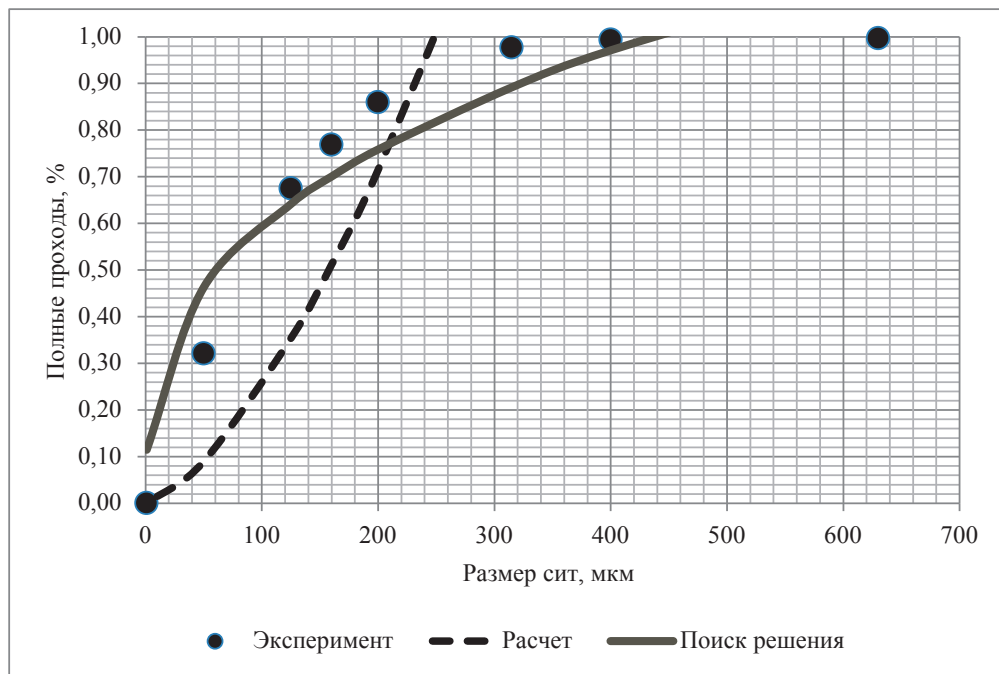


Рис. 2.9. Графическая обработка результатов эксперимента

Аппроксимация Плитта показывает немного лучший результат (рис. 2.10), а наилучшей для описания данного гранулометрического состава подходит формула (2.45), скриншот расчетов для которой представлен на рис. 2.11.

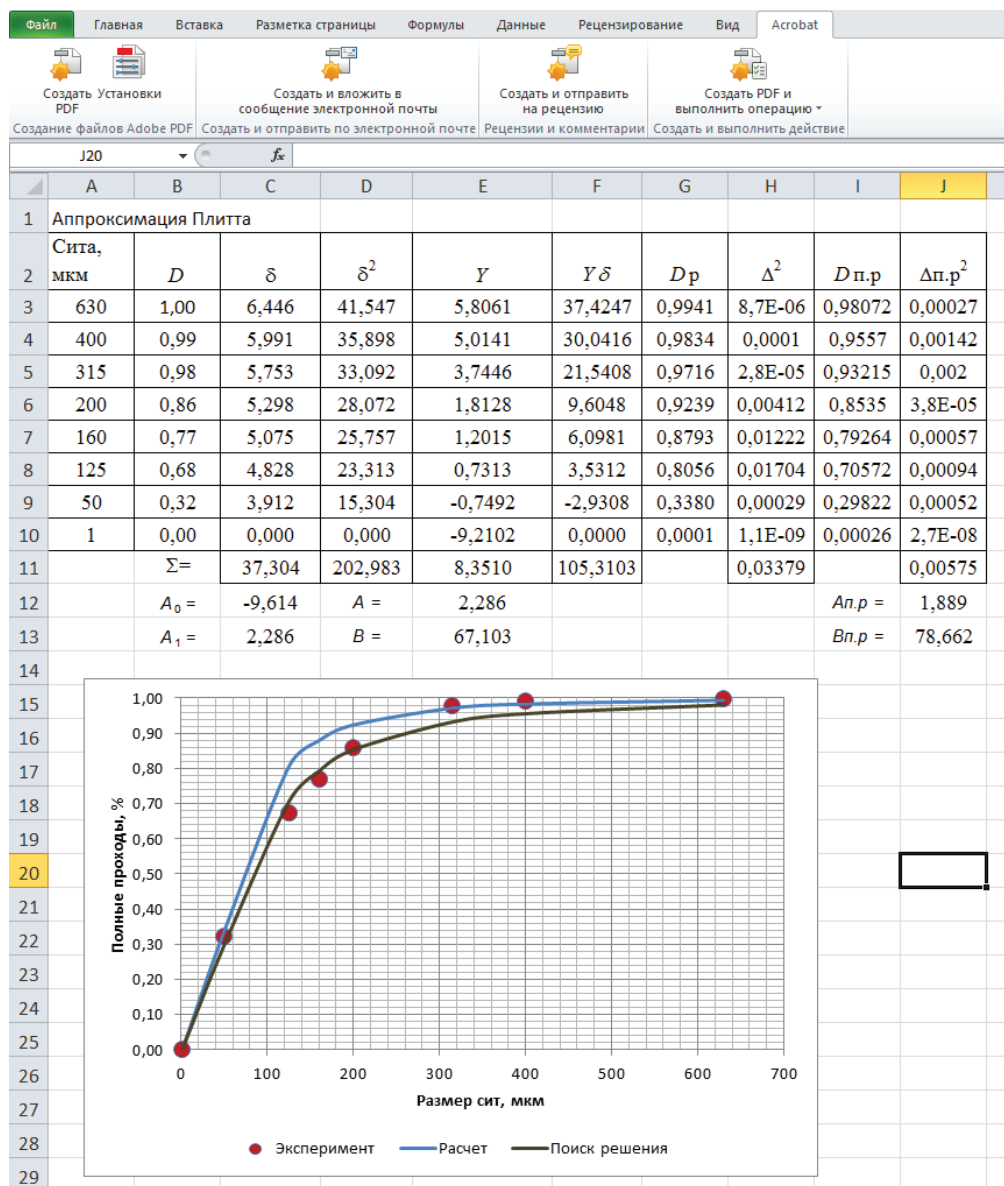


Рис. 2.10. Скриншот обработки результатов эксперимента формулой Плитта (2.43)



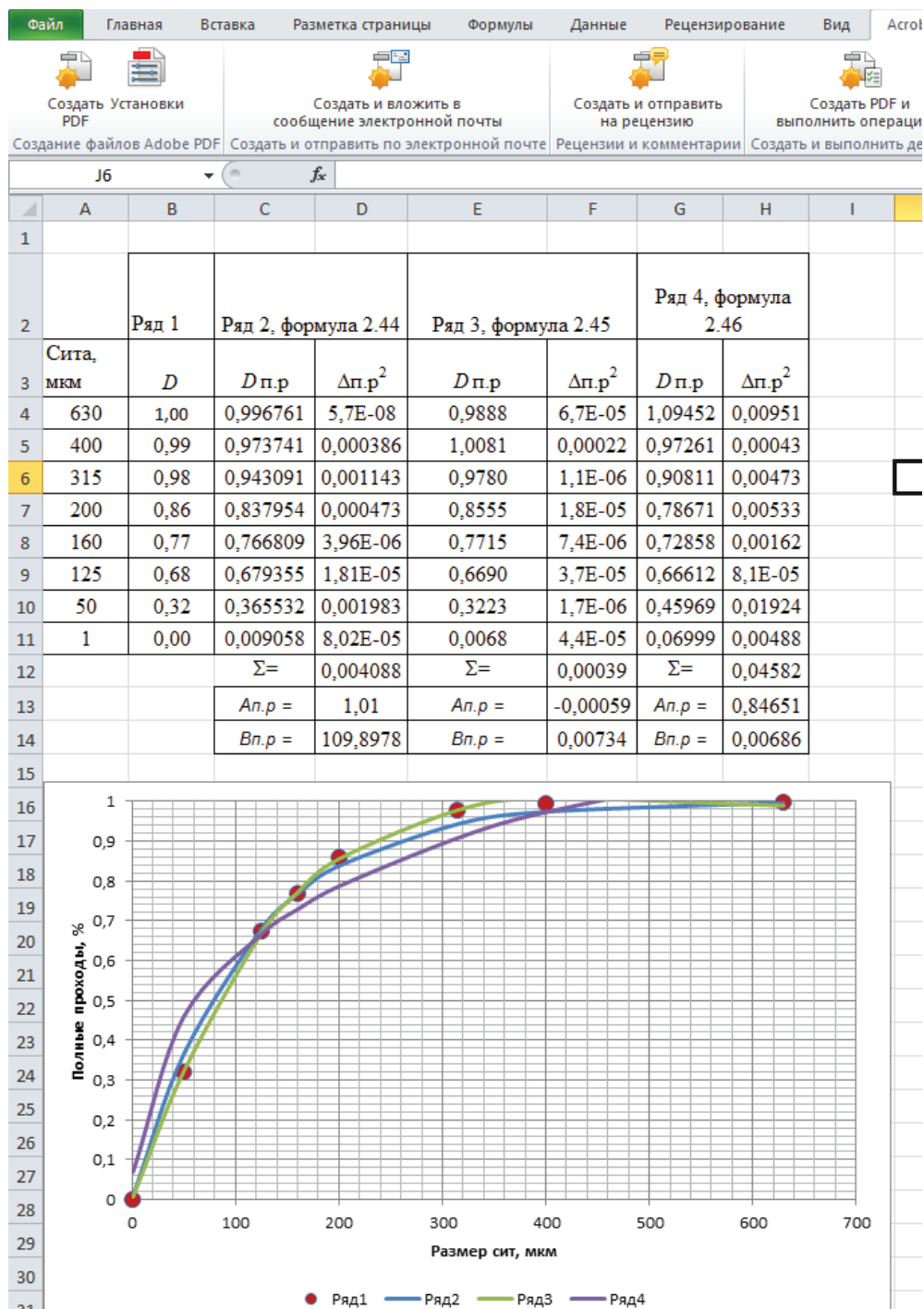


Рис. 2.11. Скриншот обработки результатов эксперимента формулами (2.44–2.46)

## 2.4. Имитационное моделирование траектории падения шарообразных частиц с наклонной поверхности

### 2.4.1. Основы теории

Создание классификаторов для пневматического фракционирования дисперсных частиц осуществляется на основе теоретических и экспериментальных исследований процесса разделения.

Рассмотрим конструкцию метательного классификатора (рис. 2.12).

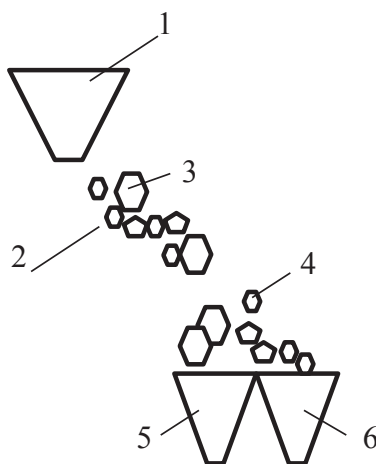


Рис. 2.12. Метательный классификатор:

1 — бункер исходного продукта; 2 — наклонная полка; 3 — легкие частицы; 4 — тяжелые частицы; 5 — бункер легкого продукта; 6 — бункер тяжелого материала

Исходный материал из бункера 1 попадает на наклонную поверхность 2 и скатывается вниз. Легкие частицы 3 попадают в бункер 5, а тяжелые 4 — в бункер 6. Сепарация материала на фракции осуществляется под воздействием сил инерционного разгона частиц по полке, силы тяжести и силы трения воздушной среды.

При моделировании процесса пневматической сепарации необходимо количественно оценить действие сил на отдельную частицу [14, 15, 19].

Движение частицы по плоскости определяется взаимодействием следующих сил (рис. 2.13).

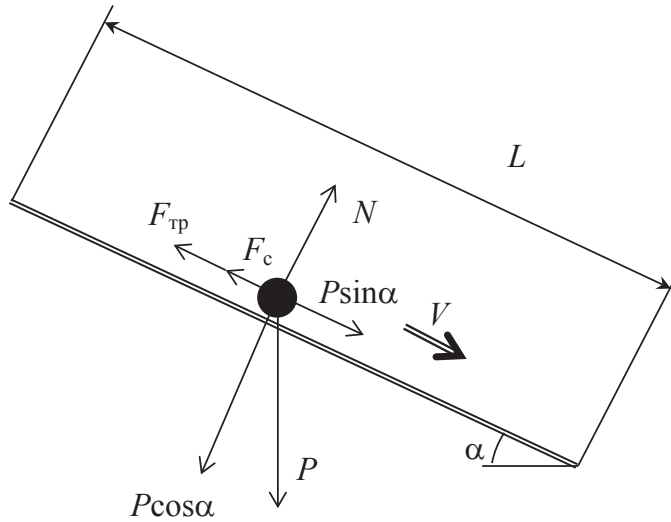


Рис. 2.13. Схема сил, действующих на частицу, движущуюся по наклонной плоскости

Сила тяжести  $P$ , направленная вертикально вниз:

$$P = mg = V_m \rho_m g = \frac{\pi d^3}{6} \rho_m g, \quad (2.52)$$

где  $m$  — масса частицы материала, кг;  $V_m = \frac{\pi d^3}{6}$  — объем шаровидной частицы материала, кг/м<sup>3</sup>;  $\rho_m$  — плотность материала частицы, кг/м<sup>3</sup>;  $g$  — ускорение свободного падения, м/с<sup>2</sup>;  $d$  — диаметр частицы, м.

Нормальная сила реакции  $N$  направлена вверх перпендикулярно плоскости пластины

$$N = |P| \cos \alpha, \quad (2.53)$$

где  $\alpha$  — угол наклона полки.

Сила трения частицы о поверхность наклонной полки  $F_{\text{тр}}$  направлена параллельно:

$$F_{\text{тр}} = f \frac{\pi d^3}{6} \rho_m g \cos \alpha, \quad (2.54)$$

где  $f$  — коэффициент трения частицы материала о поверхность пластины.

Сила аэродинамического сопротивления примерно на два порядка меньше силы тяжести и силы трения, примем  $F_c = 0$ .

Так как частица движется по наклонной полке, проецируем имеющиеся силы на ось, параллельную плоскости движения. Дифференциальное уравнение имеет вид

$$m \frac{dV}{dt} = P \sin \alpha - F_{\text{тр}}. \quad (2.55)$$

Подставляя в уравнение (2.55) соответствующие значения сил  $P$ ,  $F_{\text{тр}}$ , получим

$$m \frac{dV}{dt} = mg \sin \alpha - mgf \cos \alpha. \quad (2.56)$$

После преобразований имеем

$$\frac{dV}{dl} \frac{dl}{dt} = g(\sin(\alpha) - f \cos(\alpha)). \quad (2.57)$$

Поскольку скорость частицы

$$V = \frac{dl}{dt}, \quad (2.58)$$

то выражение (2.58) можно преобразовать к виду

$$\frac{dV}{dl} V = g(\sin(\alpha) - f \cos(\alpha)). \quad (2.59)$$

Максимальная скорость схода частицы с полки  $V_{\text{max}}$  достигается при длине разбега частицы, равной длине полки  $l = l_{\text{max}} = L$ .

Запишем уравнение (2.59) в интегральном виде

$$\int_0^{V_{\text{max}}} V dV = \int_0^L g(\sin(\alpha) - f \cos(\alpha)) dl, \quad (2.60)$$

после интегрирования которого получаем

$$V_{\text{max}} = \sqrt{2g(\sin(\alpha) - f \cos(\alpha))L}. \quad (2.61)$$

Так как минеральные частицы, как правило, имеют округлую форму, коэффициент трения будет находиться в пределах от 0,05 до 0,2 [6]. Примем для расчетов значение коэффициента  $f = 0,125$ . В этом случае погрешность в определении конечной скорости схода частицы с полки составит около  $\pm 3\%$ .

Рассмотрим движение частицы при сходе с наклонной плоскости (рис. 2.14).

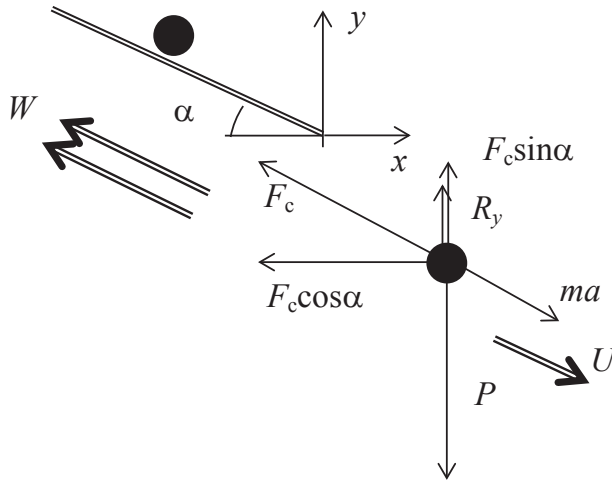


Рис. 2.14. Схема сил, действующих на частицу

На частицу действуют:

- сила тяжести  $P$ ;
- подъемная сила Архимеда

$$R_y = \frac{\pi d^3}{6} \rho g; \quad (2.62)$$

- сила аэродинамического сопротивления

$$F_c = \xi \rho S_m \frac{U^2}{2}; \quad (2.63)$$

$$U = |\bar{V} - \bar{W}| = \sqrt{(W_x - V_x)^2 + (W_y - V_y)^2}, \quad (2.64)$$

где  $W_x, W_y$  — проекции вектора скоростного потока на координатные оси;  $V_x, V_y$  — проекции вектора скорости частицы на координатные оси.

В неподвижной среде  $W_x = W_y = 0$ , а уравнение (2.64) будет выглядеть так:

$$U = |\bar{V} - \bar{W}| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}. \quad (2.65)$$

Проекции  $U_x = V_x, U_y = V_y$ .

Так как при движении частицы в воздухе  $\rho \ll \rho_m$ , силой  $R_y$  можно пренебречь.

Проекции силы аэродинамического сопротивления на координатные оси можно представить как  $F_{c_x} = -F_c \frac{U_x}{U}$ ,  $F_{c_y} = -F_c \frac{U_y}{U}$  или

$$F_{c_x} = -\xi S_m \rho U \frac{U_x}{2}, \quad F_{c_y} = -\xi S_m \rho U \frac{U_y}{2}.$$

Система уравнений движения частицы запишется

$$\begin{cases} m \frac{dV_x}{dt} = mg \sin \alpha - \xi \rho S_m U \frac{V_x}{2}, \\ m \frac{dV_y}{dt} = mg \cos \alpha - \xi \rho S_m U \frac{V_y}{2}. \end{cases} \quad (2.66)$$

Коэффициент аэродинамического сопротивления можно рассчитать по формуле Г.А. Адамова, имеющей сравнительно небольшую погрешность в широком диапазоне чисел  $Re$ :

$$\xi = \frac{24}{Re} \left( 1 + 0,065 Re^{2/3} \right)^{3/2}, \quad (2.67)$$

для которой  $\Delta \xi = 1,7\%$  при  $Re$  от 0 до 200000.

Число Рейнольдса

$$Re = \frac{U d \rho}{\mu}, \quad (2.68)$$

где  $\mu$  — динамический коэффициент вязкости среды, Па·с.

После подстановки

$$\begin{cases} \frac{dV_x}{dt} = -\frac{V_x}{\tau} \left( 1 + 0,065 Re^{2/3} \right)^{3/2}, \\ \frac{dV_y}{dt} = g - \frac{V_y}{\tau} \left( 1 + 0,065 Re^{2/3} \right)^{3/2}, \end{cases} \quad (2.69)$$

где  $\tau = \frac{\rho_m d^2}{18\mu}$  — время релаксации процесса.

$$\text{Примем } R = \left( 1 + 0,065 Re^{2/3} \right)^{3/2}.$$

Решая уравнение (2.69) для проекций на ось  $x$ ,

$$\int \frac{dV_x}{V_x} = -\frac{R}{\tau} \int dt, \quad (2.70)$$

получим

$$\ln \frac{V_x}{C_0} = -\frac{R}{\tau} t; \quad V_x = C_0 E, \quad (2.71)$$

где

$$E = \exp \left( - \frac{\left( 1 + 0,065 \operatorname{Re}^{2/3} \right)^{3/2} t}{\tau} \right) \quad (2.72)$$

или

$$E = e^{-\frac{Rt}{\tau}}. \quad (2.73)$$

При  $t = 0$ ;  $V_x = V_{x0}$ ;  $C_0 = V_{x0}$ :

$$V_x = \frac{dx}{dt} = V_{x0} E; \quad (2.74)$$

$$x = V_{x0} \frac{\tau}{R} (1 - E). \quad (2.75)$$

Решая для проекций на ось  $y$

$$\int \frac{dV_x}{\left( g - \frac{R}{\tau} \right)} = \int dt, \quad (2.76)$$

$$\ln \left( g - \frac{R}{\tau} V_y \right) = - \frac{R}{\tau} t; \quad g - \frac{R}{\tau} V_y = C_0 E. \quad (2.77)$$

При  $t = 0$ ;  $V_y = V_{y0}$ ;  $C_0 = g - R/\tau V_{y0}$ .

$$V_y = g \frac{\tau}{R} - \left( \frac{g\tau}{R} - V_{y0} \right) E \quad (2.78)$$

или

$$V_y = M - (M - V_{y0}) E, \quad (2.79)$$

где

$$M = g \frac{\tau}{R}. \quad (2.80)$$

После преобразований

$$\int dy = \int M dt - \int (M - V_{y0}) E dt, \quad (2.81)$$

$$y = C_0 + Mt + \frac{\tau}{R} (M - V_{y0}) E. \quad (2.82)$$

При  $t = 0$ ;  $y = 0$ ;  $C_0 = -\tau/R (M - V_{y0})$ :

$$y = Mt - \frac{\tau}{R}(M - V_{y0})(1 - E). \quad (2.83)$$

## 2.4.2. Выполнение имитационного эксперимента

Зная конечную высоту падения частицы  $h$  (рис. 2.15), необходимо определить абсциссу падения трех частиц с размерами 50 мкм, 100 мкм и 5000 мкм.

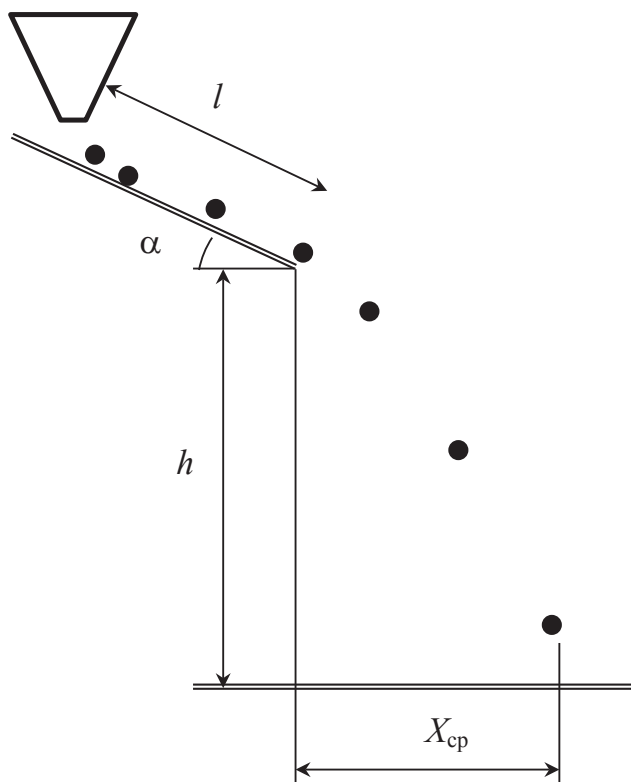


Рис. 2.15. Схема установки

Для выполнения задачи имитационного моделирования необходимо решить дифференциальные уравнения пошаговым методом в электронной таблице, задавая каждый раз новыми начальными условиями.



Решение задачи начнем с записи исходных данных в электронной таблице (рис. 2.16). Все данные заносятся в системе СИ — кг, м, с.

Исходные данные				Расчетные данные	
Диаметр частицы, м $d=$	0,00005			$\sin\alpha=$	0,71
Высота падения, м $h=$	0,155			$\cos\alpha=$	0,71
Длина полки, м $l=$	0,233			$\operatorname{tg}\alpha=$	1,00
Угол наклона, град $\alpha=$	45	в рад	0,785	Время релаксации $\tau=$	0,0208
Плотность частицы, кг/м <sup>3</sup> $\rho_m=$	2700				
Плотность воздуха, кг/м <sup>3</sup> $\rho_v=$	1,2			Движение по полке	
Вязкость воздуха, Па·с $\mu=$	1,8E-05			Коэффициент трения $f=$	0,125
$\Delta t=$	0,0002			Конечная скорость $V=$	1,68

Рис. 2.16. К решению задачи

Исходные данные:

- первоначальный диаметр частицы  $d = 50$  мкм;
- конечная высота падения частицы  $h = 155$  мм;
- длина разгонной полки  $l = 233$  мм;
- угол наклона полки  $\alpha = 45$  град (для перевода в радианы воспользоваться зависимостью  $\alpha_{\text{рад}} = \alpha_{\text{град}} \pi / 180$ );
- истинная плотность частицы  $\rho_m = 2700$  кг/м<sup>3</sup>;
- плотность воздуха  $\rho_v = 1,2$  кг/м<sup>3</sup>;
- динамическая вязкость воздуха  $\mu = 1,8 \cdot 10^{-5}$  Па·с.

По исходным данным вычисляются расчетные данные:

- $\sin\alpha$ ,  $\cos\alpha$ ,  $\operatorname{tg}\alpha$ ;
- время релаксации процесса  $\tau = \frac{\rho_m d^2}{18\mu}$ .

Решение задачи движения частиц по полке сводится к определению конечной скорости схода частицы с полки

$$V_{\max} = \sqrt{2g(\sin(\alpha) - f \cos(\alpha))L}.$$

Для решения задачи падения частиц с полки перейдем к численному дифференцированию.

Примем за один шаг времени падения частицы  $\Delta t = 0,0002$  с.

На первом шаге задаем начальные условия:

$$t = \Delta t = 0,0002;$$

$$x = 0;$$

$$y = 0;$$

$$V_{x0} = V \cos \alpha;$$

$$V_{y0} = V \sin \alpha.$$

Вычислим число Re и параметры  $R$ ,  $E$ ,  $M$  согласно

$$\text{Re} = \frac{\sqrt{V_x^2 + V_y^2} d\rho}{\mu};$$

$$R = \left(1 + 0,065 \text{Re}^{2/3}\right)^{3/2};$$

$$E = e^{-\frac{Rt}{\tau}};$$

$$M = g \frac{\tau}{R}.$$

Определим проекции конечной скорости на данном шаге:

$$V_x = V_{x0} E;$$

$$V_y = M - (M - V_{y0}) E$$

и приращение по координатам

$$\Delta x = V_{x0} \frac{\tau}{R} (1 - E);$$

$$\Delta y = Mt - \frac{\tau}{R} (M - V_{y0}) (1 - E).$$

На втором и последующих шагах выполняем следующие операции:

- вычисляем координаты частицы  $x_i = x_{i-1} + \Delta x$ ,  $y_i = y_{i-1} + \Delta y$ ;
- приравниваем величины проекций начальных скоростей движения частицы конечным скоростям предыдущего шага итерации:

$$V_{x0i} = V_{y(i-1)},$$

$$V_{y0i} = V_{y(i-1)};$$

- определяем точность вычисления ординаты падения частицы

$$\left| \frac{h - y_i}{h} \right|.$$

Повторяем вычисления для следующих шагов до тех пор, пока  $y_i$  не станет равно заданному значению  $h$  с точностью  $\left| \frac{h - y_i}{h} \right| \leq 0,5\%$ . Для

этого, возможно, потребуется уменьшить время  $\Delta t$  на конечных шагах. Результаты вычислений записываем в электронную таблицу (рис. 2.17).

$\Delta t$	$t$	$x$	$y$	$V_{x0}$	$V_{y0}$	$Re$	$R$	$E$	$M$	$V_x$	$V_y$	$\Delta x$	$\Delta y$	$(h-y)/h$
0,0002	0,0002	0,00000	0,00000	1,1894	1,1884	5,6	1,32	0,9874	0,15	1,1744	1,1754	0,00024	0,00024	100%
0,0002	0,0004	0,00024	-0,00024	1,1744	1,1754	5,5	1,32	0,9750	0,15	1,1450	1,1498	0,00046	0,00047	100%
0,0002	0,0006	0,00070	-0,00070	1,1450	1,1498	5,4	1,32	0,9628	0,16	1,1024	1,1129	0,00067	0,00068	100%
0,0002	0,0008	0,00137	-0,00138	1,1024	1,1129	5,2	1,31	0,9510	0,16	1,0484	1,0660	0,00086	0,00087	99%
0,0002	0,0010	0,00223	-0,00225	1,0484	1,0660	5,0	1,30	0,9396	0,16	0,9851	1,0112	0,00102	0,00104	99%
0,0002	0,0012	0,00325	-0,00329	0,9851	1,0112	4,7	1,29	0,9286	0,16	0,9148	0,9503	0,00114	0,00118	98%
0,0002	0,0014	0,00439	-0,00447	0,9148	0,9503	4,4	1,27	0,9180	0,16	0,8398	0,8856	0,00123	0,00128	97%
0,0002	0,0016	0,00562	-0,00575	0,8398	0,8856	4,1	1,26	0,9079	0,16	0,7624	0,8190	0,00128	0,00136	96%
0,0002	0,0018	0,00690	-0,00711	0,7624	0,8190	3,7	1,24	0,8981	0,16	0,6848	0,7523	0,00130	0,00141	95%

Рис. 2.17. Скриншот вычислений

После нахождения абсциссы падения первой частицы (50 мкм), скопируем столбцы со значениями  $x$ ,  $y$ . Вставим скопированные данные при помощи команды «специальная вставка — значения» в свободные ячейки электронной таблицы.

Проведем аналогичные вычисления для частиц с размерами 100 мкм и 5000 мкм.

Построим точечную диаграмму, как на рис. 2.18.

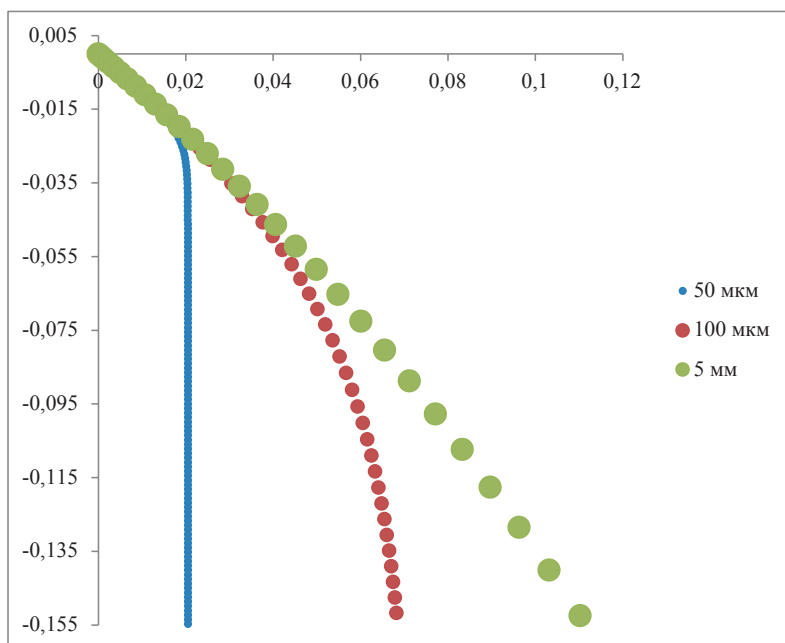


Рис. 2.18. Траектории движения частиц

Таким образом, проведенный эксперимент позволяет получить расчетные скорости движения частиц разных размеров, определить их траектории движения. И в конечном итоге определить конструктивные размеры метательного классификатора.

## **2.5. Контрольные вопросы**

---

1. В чем отличие полигона распределения от гистограммы?
2. Дайте определение абсолютной и относительной погрешности.
3. Назовите определение функции степени фракционного извлечения.
4. В чем заключается метод наименьших квадратов?
5. В чем разница между аппроксимацией и интерполяцией функции?
6. Как проводится имитационный эксперимент?

---

---

## Библиографический список

---

---

1. Бойко, Н. Г. Основы научных исследований : курс лекций / Н. Г. Бойко, О. В. Федоров. — Донецк : ДонНТУ, 2007. — 76 с. URL: <http://ea.donntu.org:8080/bitstream/123456789/8998/1/Основы научных исследований.pdf> (дата обращения: 11.10.2019).
2. Колесников, А. Ф. Основы математической обработки результатов измерений / А. Ф. Колесников ; Омский электромех. ин-т инженеров ж.-д. транспорта. — Томск : Изд-во Томского университета, 1963. — 49 с.
3. ГОСТ 8.207–76. Прямые измерения с многократными наблюдениями. Методы обработки результатов измерений. — Москва : Стандартинформ, 1978.
4. Рыбалко, А. Ф. Теория вероятностей и математическая статистика / А. Ф. Рыбалко, А. Б. Соболев. — ЭИ. — 2006. — в корпоративной сети УрФУ. URL: [http://study.urfu.ru/view/Aid\\_view.aspx?AidId=259](http://study.urfu.ru/view/Aid_view.aspx?AidId=259) (дата обращения: 11.10.2019).
5. Савельева, А. И. Обработка результатов измерений при проведении физического эксперимента : методические указания / А. И. Савельева, И. Н. Фетисов. — Москва : МГТУ, 1990. — 32 с.
6. Пономарев, В. Б. Определение предельной абсолютной ошибки функции : методические указания / В. Б. Пономарев. — Екатеринбург : УрФУ, 2015. URL: <http://study.urfu.ru/Aid/ViewMeta/13386> (дата обращения: 11.10.2019).
7. Путилов, В. Я. Методические указания по расчету и рекомендации по снижению абразивного износа пневмотранспортных трубопроводов систем пылеприготовления и золошлакоудаления ТЭС / В. Я. Путилов ; ГОУ ВПО «МЭИ». РД 153–34.1–27.512–2001. URL: <http://libnorm.ru/Files2/1/4294817/4294817633.pdf> (дата обращения: 11.10.2019).

8. Полоцкий, Л. М. Автоматизация химических производств. Теория, расчет и проектирование систем автоматизации : учеб. пособие для вузов / Л. М. Полоцкий. — Москва: Химия, 1982. — 296 с.
9. Пономарев, В. Б. Математическая обработка результатов инженерного эксперимента : учебное пособие / В. Б. Пономарев, А. Б. Лошкарёв. — Екатеринбург : УрФУ, 2016. URL: [https://study.urfu.ru/Aid/Publication/13537/1/Ponomarev\\_Loshkarev.pdf](https://study.urfu.ru/Aid/Publication/13537/1/Ponomarev_Loshkarev.pdf) (дата обращения: 11.10.2019).
10. Вирт, Н. Алгоритмы и структуры данных / Н. Вирт ; пер. с англ. Д. Б. Подшивалова. — 2-е изд., испр. — Санкт-Петербург : Невский Диалект, 2001. — 352 с. — ISBN 0-13-022005-1: 99.30.
11. Бондарь, А. Г. Планирование эксперимента в химической технологии: Основные положения, примеры и задачи : учеб. пособие / А. Г. Бондарь, Г. А. Статюха; МПС СССР. Омский электромех. ин-т инженеров ж.-д. транспорта. — Томск : Томский ун-т, 1963. — 46 с.
12. Пономарев В. Б. Повышение эффективности процесса пневмокласификации сыпучих материалов в каскадных аппаратах: дис. канд. техн. наук. БГТУ им. В. Г. Шухова. 2011. URL: <http://dlib.rsl.ru/rsl01005000000/rsl01005390000/rsl01005390674/rsl01005390674.pdf> (дата обращения: 11.10.2019).
13. Пономарев, В. Б. Расчет и проектирование оборудования для воздушной сепарации сыпучих материалов : учебное пособие / В. Б. Пономарев. Екатеринбург : УрФУ, 2015. — 127 с. URL: <http://study.urfu.ru/Aid/ViewMeta/13394> (дата обращения: 11.10.2019).
14. Пономарев, В. Б. Математическое моделирование технологических процессов : курс лекций / В. Б. Пономарев, А. Б. Лошкарёв; ГОУ ВПО «Уральский государственный технический университет — УПИ», 2006. URL: [http://study.urfu.ru/Aid/Publication/2525/1/Ponomarev\\_loshkarev.pdf](http://study.urfu.ru/Aid/Publication/2525/1/Ponomarev_loshkarev.pdf) (дата обращения: 11.10.2019).
15. Пономарев, В. Б. Математическое моделирование : лаб. практ. В 2 ч. Часть 2 / В. Б. Пономарев, А. Б. Лошкарёв; ГОУ ВПО «Уральский государственный технический университет — УПИ», 2006. URL: [http://study.urfu.ru/Aid/Publication/7483/1/Ponomarev\\_Loshkarev\\_2.pdf](http://study.urfu.ru/Aid/Publication/7483/1/Ponomarev_Loshkarev_2.pdf) (дата обращения: 11.10.2019).

16. Блатов, И. А. Вычислительная математика : конспект лекций / О. В. Старожилова, И. А. Блатов. — Самара : ИУНЛ ПГУ-ТИ, 2010. — 189 с. URL: <https://rucont.ru/efd/280013> (дата обращения: 11.10.2019).
17. Мастяева, И. Н. Численные методы : учебно-практическое пособие / И. Н. Мастяева. — Москва : Изд-во МЭСИ, 2003. — 240 с. URL: [http://biblioclub.ru/index.php?page=book\\_red&id=90907](http://biblioclub.ru/index.php?page=book_red&id=90907) (дата обращения: 11.10.2019).
18. Курбатова, А. Г. Физика : метод. указания / А. Г. Курбатова, Л. А. Дерезина ; АУ ЧР СПО «Чебоксарский машиностроительный техникум», 2012. — 68 с. URL: <https://infourok.ru/metodicheskie-ukazaniya-po-provedeniyu-laboratornih-rabot-po-kursu-fizika-dlya-studentov-i-prepodavateley-2154201.html> (дата обращения: 11.10.2019).
19. Майстренко, А. В. Численные методы расчета, моделирования и проектирования технологических процессов и оборудования: учебное пособие / А. В. Майстренко, Н. В. Майстренко. — Тамбов: Изд-во ФГБОУ ВПО «ТГТУ», 2011. — 144 с. — ISBN 978-5-8265-1069-8.
20. Таблица первообразных и производных. Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения. URL: <http://www.studfiles.ru/preview/2806555/> (дата обращения: 11.10.2019).
21. Открытый колледж. Физика. URL: <https://physics.ru/> (дата обращения: 11.10.2019).







*Учебное издание*

**Пономарев** Владимир Борисович  
**Лошкарев** Александр Борисович

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ  
ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ  
ИНЖЕНЕРНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА**

Редактор О. С. Смирнова  
Верстка О. П. Игнатьевой

Подписано в печать 29.10.2019. Формат 70×100/16.  
Бумага офсетная. Цифровая печать. Усл. печ. л. 8,4.  
Уч.-изд. л. 5,2. Тираж 40 экз. Заказ 323.

Издательство Уральского университета  
Редакционно-издательский отдел ИПЦ УрФУ  
620049, Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 5  
Тел.: +7 (343) 375-48-25, 375-46-85, 374-19-41  
E-mail: rio@urfu.ru

Отпечатано в Издательско-полиграфическом центре УрФУ  
620083, Екатеринбург, ул. Тургенева, 4  
Тел.: +7 (343) 358-93-06, 350-58-20, 350-90-13  
Факс: +7 (343) 358-93-06  
<http://print.urfu.ru>





**ПОНОМАРЕВ ВЛАДИМИР БОРИСОВИЧ**

Кандидат технических наук, доцент. Ведущий специалист в области разработки и моделирования процессов и оборудования для фракционирования дисперсных материалов, читает лекционные курсы по математическому моделированию технологических процессов, по разработке и проектированию специального оборудования.



**ЛОШКАРЕВ АЛЕКСАНДР БОРИСОВИЧ**

Старший преподаватель, высококвалифицированный специалист. Читает лекционные курсы по процессам и оборудованию для производства строительных материалов и изделий.